المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات

للصف الثالث المتوسط

الفصل الدراسي الثاني

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

يوزع مجانا ولا يباع
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

طبعة ١٤٤٣ - ٢٠٢١

ⓒ وزارة التعليم ، ١٤٣٨هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

وزارة التعليم

الرياضيات للصف الثالث المتوسط : (الفصل الدراسي الثاني – كتاب الطالب). / وزارة التعليم – الرياض ، ١٤٣٨هـ .

٢٢٢ص ؛ ٢١ × ٢٧,٥ سم

ردمك : ٩٧٨-٦٠٣-٥٠٨-٥٨٧-٨

١ ـ الرياضيات ـ تعليم – السعودية ٢ ـ التعليم المتوسط ـ السعودية

ـ كتب دراسية. أ ـ العنوان

ديوي ٣٧٢,٧ ١٤٣٨/٦٨٥٧

رقم الإيداع : ١٤٣٨/٦٨٥٧

ردمك :٩٧٨-٦٠٣-٥٠٨-٥٨٧-٨

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم

www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين"

IEN.EDU.SA

تواصل بمقترحاتك لتطوير الكتاب المدرسي

FB.T4EDU.COM

وزارة التعليم

Ministry of Education

2021 - 1443

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

المقدمة

الحمدلله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية؛ وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية؛ سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، التي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياتها المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، إضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم، وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفهرس

الفصل ٦ كثيرات الحدود

التهيئة للفصل ٦ ..... ٩

٦-١ ضرب وحيدات الحد ١٠

٦-٢ قسمة وحيدات الحد ١٦

٦-٣ كثيرات الحدود ٢٢

معمل الجبر: جمع كثيرات الحدود وطرحها ٢٧

٦-٤ جمع كثيرات الحدود وطرحها ٢٩

اختبار منتصف الفصل ٣٤

٦-٥ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود ٣٥

معمل الجبر: ضرب كثيرات الحدود ٤١

٦-٦ ضرب كثيرات الحدود ٤٣

٦-٧ حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود ٤٩

اختبار الفصل ٥٥

الاختبار التراكمي ٥٦

الفصل ٧ التحليل والمعادلات التربيعية

التهيئة للفصل ٧ ..... ٥٩

٧-١ تحليل وحيدات الحد ٦٠

٧-٢ استعمال خاصية التوزيع ٦٤

معمل الجبر: تحليل ثلاثية الحدود ٧١

٧-٣ المعادلات التربيعية: $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ٧٣

اختبار منتصف الفصل ٨٠

٧-٤ المعادلات التربيعية: $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ ٨١

٧-٥ المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين ٨٧

٧-٦ المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة ٩٣

اختبار الفصل ١٠١

الاختبار التراكمي ١٠٢

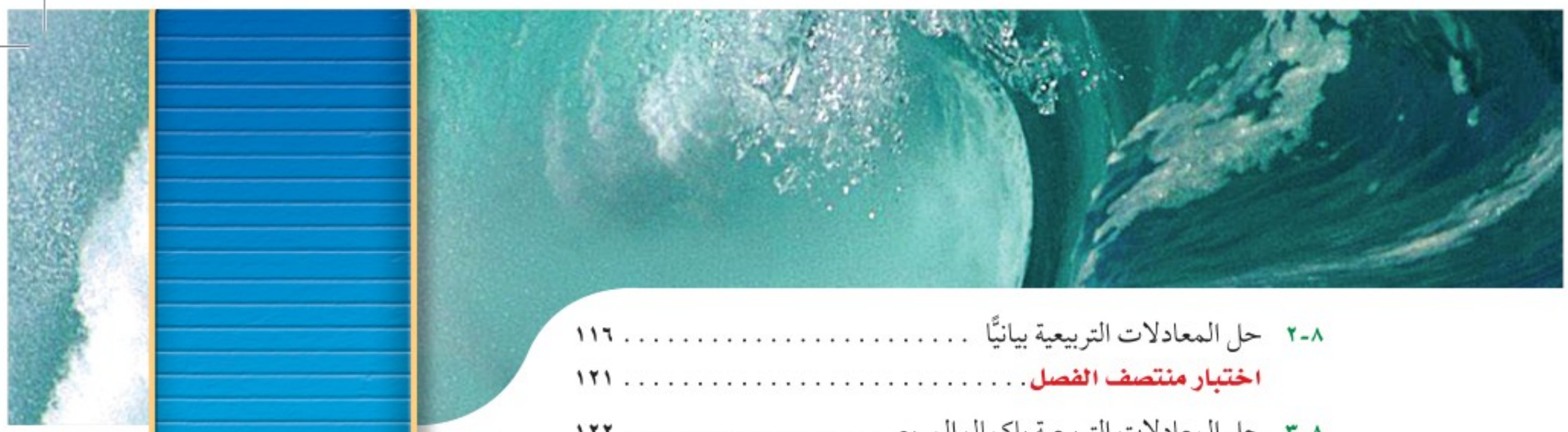
الفصل ٨ الدوال التربيعية

التهيئة للفصل ٨ ..... ١٠٥

٨-١ تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا ١٠٩

معمل الجبر: معدل التغير في الدالة التربيعية ١١٥

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443



الفهرس

٢-٨ حل المعادلات التربيعية بيانيًّا ١١٦
اختبار منتصف الفصل ١٢١
٣-٨ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع ١٢٢
٤-٨ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام ١٢٨
اختبار الفصل ١٣٥
الاختبار التراكمي ١٣٦

الفصل ٩

المعادلات الجذرية والمثلثات

التهيئة للفصل ٩ ..... ١٣٩
١-٩ تبسيط العبارات الجذرية ١٤٠
معمل الحاسبة البيانية : الأسس النسبية ١٤٦
٢-٩ العمليات على العبارات الجذرية ١٤٧
٣-٩ المعادلات الجذرية ١٥٢
٤-٩ نظرية فيثاغورس ١٥٦
اختبار منتصف الفصل ١٦١
٥-٩ المسافة بين نقطتين ١٦٢
٦-٩ المثلثات المتشابهة ١٦٨
معمل الجبر: استقصاء النسب المثلثية ١٧٤
٧-٩ النسب المثلثية ١٧٥
اختبار الفصل ١٨١
الاختبار التراكمي ١٨٢

الفصل ١٠

الإحصاء والاحتمال

التهيئة للفصل ١٠ ..... ١٨٥
١-١٠ تصميم دراسة مسحية ١٨٦
٢-١٠ تحليل نتائج الدراسة المسحية ١٩١
٣-١٠ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع ١٩٨
اختبار منتصف الفصل ٢٠٥
٤-١٠ التباديل والتوافيق ٢٠٦
٥-١٠ احتمالات الحوادث المركبة ٢١٣
اختبار الفصل ٢١٩
الاختبار التراكمي ٢٢٠

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل ٦
كثيرات الحدود

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أبسّط عبارات تتضمن وحيدات الحد.
- أجد درجة كثيرة حدود، وأكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية، وأجمع، وأطرح، وأضرب كثيرات الحدود.

لماذا؟

سباق الجري: يمكن استعمال كثيرات الحدود لنمذجة العديد من مواقف الحياة الواقعية؛ مثل المسارات المنحنية التي يسلكها المتسابقون في سباق الجري.

المفردات:

- وحيدة الحّد ص (١٠)
- رُتبة المقدار ص (١٩)
- كثيرة الحدود ص (٢٢)

المطويات منظم أفكار

كثيرات الحدود: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول كثيرات الحدود، مبتدئًا بثماني أوراق A4.

١ **رتب** الأوراق الثماني بعضها فوق بعض؛ لتكوّن كتيبًا.

٢ **ثبّت** الأوراق من جانبها الأيمن، وقص شريطًا من طرف كل صفحة بحيث يزيد كل شريط بمقدار ٣ سم على سابقه، كما في الشكل.

٣ **سمِّ** غلاف المطوية "كثيرات الحدود"، وضعْ أرقام الدروس على الأشرطة، كما في الشكل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل ٦

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل بدء الإجابة:

اختبار سريع

اكتب كل عبارة فيما يأتي بالصيغة الأسية: (مهارة سابقة)

١) ٤ × ٤ × ٤ × ٤ × ٤

٢) ب × ب × ب × ب × ب × ب

٣) م × م × ب × ب × ب × ب × ب × ب

٤) $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣}$

٥) $\frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{س}{ص} \times \frac{و}{ع} \times \frac{و}{ع}$

أوجد قيمة كل عبارة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

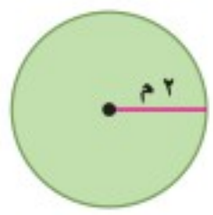
٦) $٢^{٣}$ ٧) $(-٥)^{٢}$ ٨) $٣^{٣}$

٩) $(-٤)^{٣}$ ١٠) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$ ١١) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

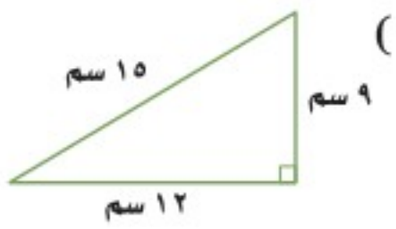
١٢) **مدرسة:** إذا كان احتمال تخمين الإجابة الصحيحة عن ٥ أسئلة من نوع الصواب والخطأ هو $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$، فعبّر عن هذا الاحتمال في صورة كسر اعتيادي دون استعمال الأسس.

أوجد مساحة كل من الشكلين الآتيين: (مهارة سابقة)

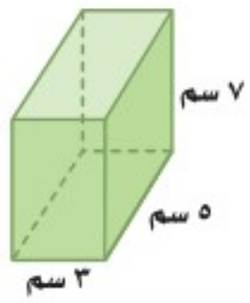
١٣)



١٤)



١٥) أوجد حجم الشكل المجاور.



مراجعة سريعة

مثال ١

اكتب العبارة الآتية بالصيغة الأسية:

٥ × ٥ × ٥ × ٥ + س × س × س.

العدد ٥ أساس واستعمل كعامل ٤ مرات.

س أساس واستعمل كعامل ٣ مرات.

إذن ٥ × ٥ × ٥ × ٥ + س × س × س = $٥^{٤} + س^{٣}$.

مثال ٢

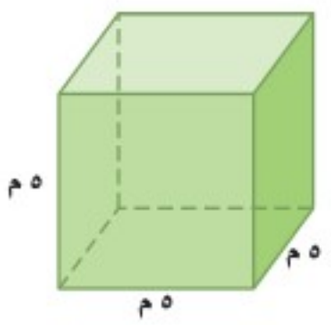
أوجد قيمة $\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢}$.

$\left(\frac{٥}{٧}\right)^{٢} = \frac{٥}{٧} \times \frac{٥}{٧}$ — اكتب القوى في صورة حاصل ضرب

$= \frac{٢٥}{٤٩}$ — اضرب

مثال ٣

أوجد حجم الشكل المجاور.



ح = ل ض ع — حجم متوازي المستطيلات

= ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥ — ل = ٥، ض = ٥، ع = ٥

الحجم ١٢٥ $م^{٣}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

ضرب وحيدات الحد

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست إجراء العمليات على العبارات الأسية.

والآن

- أضرب وحيدات الحد.
- أبسّط عبارات تتضمن وحيدات الحد.

المفردات

وحيدة الحد

الثابت

لماذا ؟

تحتوي كثير من الصيغ على وحيدات حد، فمثلاً صيغة قوة محرك السيارة بالحصان هي ق = ك $\left(\frac{ع}{٢٣٤}\right)^{٣}$ ؛ حيث تمثِّل: ق قوة المحرك بالحصان، ك كتلة السيارة بركابها، ع سرعتها بعد مسيرها مسافة ربع ميل.

من الواضح أن قوة المحرك بالحصان تزداد كلما ازدادت السرعة.

وحيدات الحد: تكون **وحيدة الحد** عددًا أو متغيرًا أو حاصل ضرب عدد في متغير واحد أو أكثر بأسس صحيحة غير سالبة. وتتكون من حد واحد فقط.

فمثلاً الحد: ك $\left(\frac{ع}{٢٣٤}\right)^{٣}$ في صيغة حساب قوة محرك السيارة، هو وحيدة حد.

أما العبارة التي تتضمن القسمة على متغير مثل : $\frac{أ ب}{جـ}$ ، فليست وحيدة حد.

الثابت: هو وحيدة حد تمثل عددًا حقيقيًّا. ووحيدة الحد ٣ س هي مثال على عبارة خطية؛ لأن أس المتغير س فيها ١، أما وحيدة الحد ٢س^{٢} فليست عبارة خطية؛ لأن الأس عدد موجب أكبر من ١ .

مثال ١ تمييز وحيدات الحد

حدِّد إذا كانت العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك:

أ) ١٠ نعم؛ العدد ١٠ ثابت، لذا فهو وحيدة حد.

ب) ف + ٢٤ لا؛ تتضمن هذه العبارة عملية جمع، لذا فهي تحتوي على أكثر من حد.

جـ) هـ^{٢} نعم؛ تمثل هذه العبارة حاصل ضرب المتغير في نفسه.

د) ل نعم؛ المتغيرات المنفردة وحيدات حد.

تحقق من فهمك

١أ) −س + ٥

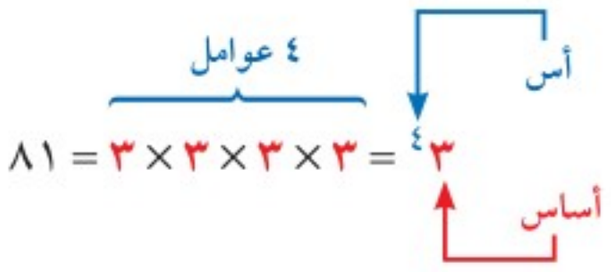
١ب) ٢٣أ ب جـ د^{٢}

١جـ) $\frac{س ص ع^{٢}}{٢}$

١د) $\frac{م ف}{ن}$

تذكَّر أن العبارة التي على الصورة س^{ن} التي تعبر عن نتيجة ضرب س في نفسها ن مرة تُسمى قوة.

ويُطلق على س الأساس، وعلى ن الأس. وقد تستعمل كلمة قوة لتعني الأس أحيانًا.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

ويمكنك إيجاد حاصل ضرب القوى في المثالين الآتيين بتطبيق تعريف القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$٢^{٤} \times ٢^{٢} = \underbrace{٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}_{\text{٤ عوامل}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{عاملان}}$$

$$\text{٤ + ٢ = ٦ عوامل}$$

$$٤^{٢} \times ٤^{٣} = \underbrace{٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤}_{\text{٣ عوامل}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{عاملان}}$$

$$\text{٢ + ٣ = ٥ عوامل}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية ضرب القوى.

مفهوم أساسي — **ضرب القوى**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لضرب قوتين لهما الأساس نفسه، اجمع أُسَّيهِما.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ ؛ وأي عددين صحيحين م ، ن فإن: $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$.

أمثلة: $ب^{٣} \times ب^{٥} = ب^{٣+٥} = ب^{٨}$ $\quad$ $جـ^{٤} \times جـ^{٦} = جـ^{٤+٦} = جـ^{١٠}$

مثال ٢ — ضرب القوى

بسّط كل عبارة مما يأتي:

أ) $(٦ن^{٣})(٢ن^{٧})$

$(٦ن^{٣})(٢ن^{٧}) = (٦ \times ٢)(ن^{٣} \times ن^{٧})$ — جمّع المعاملات والمتغيرات

$= (٦ \times ٢)(ن^{٣+٧})$ — اضرب القوى

$= ١٢ن^{١٠}$ — بسّط

ب) $(٣ب هـ^{٣})(ب^{٣}هـ^{٤})$

$(٣ب هـ^{٣})(ب^{٣}هـ^{٤}) = (٣ \times ١)(ب \times ب^{٣})(هـ^{٣} \times هـ^{٤})$ — جمّع المعاملات والمتغيرات

$= (٣ \times ١)(ب^{١+٣})(هـ^{٣+٤})$ — اضرب القوى

$= ٣ب^{٤}هـ^{٧}$ — بسّط

إرشادات للدراسة

العدد ١ معاملًا وقوة

عندما لا يظهر أس المتغير أو معامله، يمكن افتراض أن كليهما يساوي ١؛ أيْ أن $س = ١س^{١}$

تحقق من فهمك

أ٢) $(٣ص^{٤})(٧ص^{٥})$ $\quad$ **ب٢)** $(-٤ر س^{٢}ن^{٣})(-٦ر^{٥}س^{٢}ن)$

يمكنك استعمال خاصية ضرب القوى لإيجاد قوة القوة، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$(٣^{٢})^{٤} = \underbrace{(٣^{٢})(٣^{٢})(٣^{٢})(٣^{٢})}_{\text{٤ عوامل}} = ٣^{٢+٢+٢+٢} = ٣^{٨}$$

$$(ر^{٤})^{٣} = \underbrace{(ر^{٤})(ر^{٤})(ر^{٤})}_{\text{٣ عوامل}} = ر^{٤+٤+٤} = ر^{١٢}$$

يوضح المثالان السابقان خاصية قوة القوة.

مفهوم أساسي — **قوة القوة**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة القوة، اضرب الأسس.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ ؛ وأي عددين صحيحين م ، ن فإن $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

أمثلة: $(ب^{٣})^{٥} = ب^{٣ \times ٥} = ب^{١٥}$ $\quad$ $(جـ^{٦})^{٧} = جـ^{٦ \times ٧} = جـ^{٤٢}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إرشادات للدراسة

قوانين القوة

إذا لم تكن متأكدًا متى تضرب الأسس أو تجمعها، فاكتب العبارة كحاصل ضرب.

مثال ٣ قوة القوة

بسّط العبارة : $[(٢^{٣})^{٢}]^{٤}$.

$[(٢^{٣})^{٢}]^{٤} = (٢^{٣\times٢})^{٤}$ قوة القوة

$= (٢^{٦})^{٤}$ بسّط

$= ٢^{٦\times٤}$ قوة القوة

$= ٢^{٢٤} = ١٦٧٧٧٢١٦$ بسّط

تحقق من فهمك

٣أ) $[(٢^{٢})^{٢}]^{٤}$ **٣ب)** $[(٣^{٢})^{٣}]^{٢}$

ويمكنك استعمال خاصيتي ضرب القوى، وقوة القوة لإيجاد قوة حاصل الضرب. انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$(ن\ و)^{٣} = \overbrace{(ن\ و)(ن\ و)(ن\ و)}^{٣\text{ عوامل}}$

$= (ن \times ن \times ن)(و \times و \times و)$

$= ن^{٣} و^{٣}$

$(٢ص ع^{٢})^{٣} = \overbrace{(٢ص ع^{٢})(٢ص ع^{٢})(٢ص ع^{٢})}^{٣\text{ عوامل}}$

$= (٢ \times ٢ \times ٢)(ص \times ص \times ص)(ع^{٢} \times ع^{٢} \times ع^{٢})$

$= ٢^{٣} ص^{٣} ع^{٦} = ٨ص^{٣} ع^{٦}$

ويبيِّن المثالان السابقان خاصية قوة حاصل الضرب.

مفهوم أساسي قوة حاصل الضرب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة حاصل الضرب، أوجد قوة كل عامل.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب وأي عدد صحيح ن، فإن: $(أب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$.

مثال: $(-٢س ص^{٣})^{٥} = (-٢)^{٥} س^{٥} (ص^{٣})^{٥} = -٣٢ س^{٥} ص^{١٥}$.

مثال ٤ قوة حاصل الضرب

هندسة: عبّر عن مساحة الدائرة على صورة وحيدة حد.

المساحة $= ط نق^{٢}$ مساحة الدائرة

$= ط(٢س ص^{٢})^{٢}$ عوّض عن نق بـ ٢س ص٢

$= ط(٢^{٢} س^{٢} ص^{٤})$ قوة حاصل الضرب

$= ٤س^{٢} ص^{٤} ط$ بسّط

إذن، مساحة الدائرة تساوي $٤س^{٢} ص^{٤}$ ط وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

٤أ) عبّر عن مساحة المربع الذي طول ضلعه ٣س ص٢ على صورة وحيدة حد.

٤ب) عبّر عن مساحة المثلث الذي ارتفاعه ٤أ وطول قاعدته ٥أ ب٢ على صورة وحيدة حد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تبسيط العبارات: يمكنك دمج الخصائص واستعمالها في تبسيط عبارات تتضمن وحيدات حد.

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات

عند تبسيط عبارات تتضمن أقواسًا متداخلة، ابدأ أولاً بالعبارات من الداخل ثم انتقل إلى الخارج.

مفهوم أساسي **تبسيط العبارات**

أضف إلى مطويتك

لتبسيط عبارة تتضمن وحيدات حد، اكتب عبارة مكافئة لها على أن:

- يظهر كل متغير على صورة أساس مرة واحدة فقط.
- لا تتضمن العبارة قوة قوة.
- تكون جميع الكسور في أبسط صورة.

مثال ٥ **تبسيط العبارات**

بسّط العبارة : $(٣س ص^{٤})^{٢}[(-٢ ص)^{٢}]^{٣}$.

$(٣س ص^{٤})^{٢}[(-٢ ص)^{٢}]^{٣} = (٣س ص^{٤})^{٢}(-٢ ص)^{٦}$ — قوة القوة

$= (٣)^{٢}س^{٢}(ص^{٤})^{٢}(-٢)^{٦}(ص)^{٦}$ — قوة حاصل الضرب

$= ٩س^{٢}ص^{٨}(٦٤)ص^{٦}$ — قوة القوة

$= ٩(٦٤)س^{٢}ص^{٨}ص^{٦}$ — خاصية الإبدال

$= ٥٧٦س^{٢}ص^{١٤}$ — ضرب القوى

تحقق من فهمك

٥) بسّط العبارة : $(\frac{١}{٢}أ^{٢}ب^{٢})^{٣}[(-٤ب)^{٢}]^{٢}$.

تأكد

مثال ١ حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا" ، وفسر إجابتك:

١) ١٥ ٢) $٢-٣أ$ ٣) $\frac{٥جـ}{د}$

٤) $-١٥جـ^{٢}$ ٥) $\frac{ر}{٢}$ ٦) $٧ب+٩$

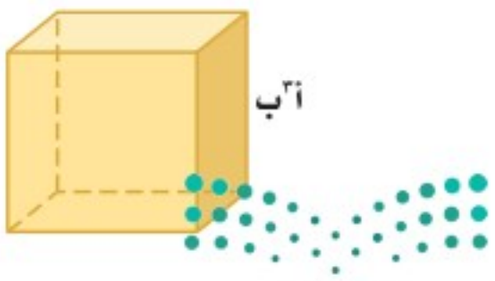
المثالان ٢ ، ٣ بسِّط كل عبارة مما يأتي:

٧) $ك(ك^{٣})$ ٨) $م^{٤}(م^{٢})$ ٩) $٢ك^{٢}(٩ك^{٤})$

١٠) $(٥م^{٤}ف)(٧م^{٤}ف^{٣})$ ١١) $[(٢٣)^{٢}]^{٢}$ ١٢) $(س ص^{٤})^{٦}$

١٣) $(-٢ف^{٢}جـ^{٣}هـ^{٢})^{٣}$ ١٤) $(-٣ب^{٥}ن^{٦})^{٤}$ ١٥) $(٤أ^{٤}ب^{٩}جـ)^{٢}$

مثال ٤ ١٦) **هندسة:** مساحة سطح المكعب هي م = ٦ ض^{٢}، حيث م مساحة سطحه، ض طول حرفه.



أ) عبّر عن مساحة سطح المكعب المجاور على صورة وحيدة حد.

ب) ما مساحة سطح المكعب إذا كان أ = ٣، ب = ٤

مثال ٥ بسِّط كل عبارة مما يأتي:

١٧) $(٥س^{٢}ص)^{٢}(٢س ص^{٣}ع)^{٣}(٤س ص ع)$ ١٨) $(-٣د^{٢}ن^{٣}جـ)^{٢}[(-٣د^{٢}ن)^{٣}]^{٢}$

١٩) $(-٢جـ^{٣}هـ)(-٣جـ ل^{٤})^{٢}(-جـ هـ ل)^{٢}$ ٢٠) $(-٧أ ب^{٤}جـ)^{٣}[(٢أ^{٢}جـ)^{٢}]^{٣}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدد إذا كانت كل من العبارات الآتية وحيدة حد، اكتب "نعم" أو "لا" ، وفسر إجابتك:

٢١) ١٢٢ ٢٢) $٣أ^{٤}$ ٢٣) ٢جـ + ٢

٢٤) $\frac{-٢جـ}{٤هـ}$ ٢٥) $\frac{٥ك}{١٠}$ ٢٦) ٦م + ٣ن

المثالان ٢ ، ٣ بسِّط كل عبارة مما يأتي:

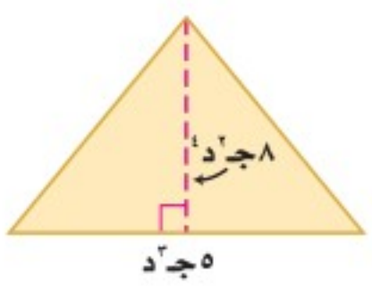
٢٧) $(ك^{٢})(٢ك^{٤})$ ٢٨) $(ص^{٦}ع^{٩})(٦ص^{٤}ع^{٢})$

٢٩) $(١٤نجـ^{٢}هـ^{٢})(-٣ن^{٤}جـ^{٢}هـ^{٢})$ ٣٠) $[(٢^{٢})^{٢}]^{٢}$

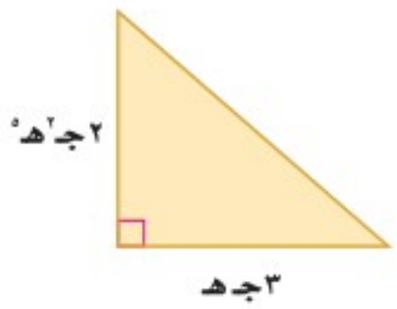
٣١) $[(-٢س ص^{٢})^{٣}]^{٢}$ ٣٢) $(ل^{٥}ك^{٧})^{٤}$

مثال ٤ **هندسة :** عبّر عن مساحة كل من المثلثين الآتيين على صورة وحيدة حد:

٣٣)



٣٤)



مثال ٥ بسِّط كل عبارة مما يأتي :

٣٥) $(٢أ^{٣})^{٤}(أ^{٣})^{٣}$ ٣٦) $(جـ^{٣})^{٢}(-٣جـ^{٥})^{٢}$

٣٧) $(٢جـهـ^{٤})^{٣}[(-٢جـ^{٤}هـ)^{٣}]^{٢}$ ٣٨) $(٥ك^{٢}م)^{٣}[(٤ك^{٢}م^{٤})^{٢}]^{٢}$

٣٩) $(ب^{٥}ر^{٢})^{٤}(-٧ب^{٣}ر^{٤})^{٢}(٦ب ر^{٣})$ ٤٠) $(٥أ^{٢}ب^{٣}جـ^{٤})^{٢}(٦أ^{٣}ب^{٤}جـ^{٢})$

٤١) $(٥,٠س^{٣})^{٢}$ ٤٢) $(-\frac{٣}{٤}جـ)^{٣}$

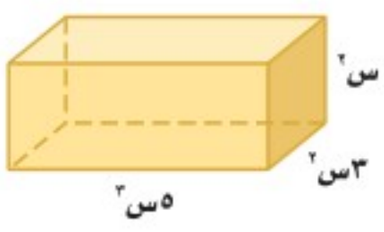
٤٣) $(\frac{٤}{٥}أ^{٢})^{٢}$ ٤٤) $(\frac{٤}{٧}م)^{٢}(٤٩م)(١٧ب)(\frac{١}{٣٤}ب^{٥})$

٤٥) $(٣أب^{٢}جـ)^{٢}(-٢أ^{٢}ب^{٤})^{٢}(أ^{٤}جـ^{٢})^{٣}(أ^{٢}ب^{٤}جـ^{٥})^{٢}(٢أ^{٣}ب^{٢}جـ^{٤})^{٣}$

هندسة : عبّر عن حجم كل مجسّم مما يأتي على صورة وحيدة حد:

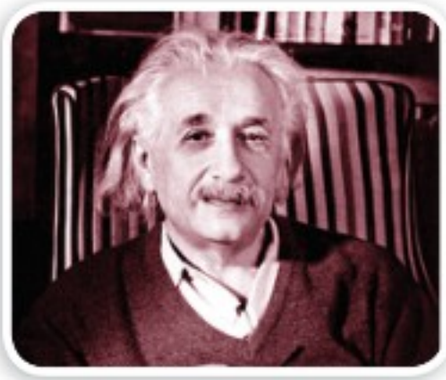
٤٦)

٤٧)



٤٨)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443



تاريخ الرياضيات

١٨٧٩م – ١٩٥٥م
يُعد ألبرت أينشتاين من أشهر العلماء في القرن العشرين. وقانونه ط= ك ع^{٢}، المعروف باسمه، حيث تمثل ط الطاقة، ك كتلة المادة، ع سرعة الضوء، يُظهر أن الكتلة قد تتحول إلى طاقة قابلة للاستعمال إذا تسارعت على نحوٍ كافٍ.

٤٩) **طاقة:** يمكن تحويل الكتلة كاملة إلى طاقة باستعمال الصيغة ط = ك ع^{٢}. حيث: ط هي الطاقة بالجول وك الكتلة بالكيلوجرام وع سرعة الضوء تبلغ ٣٠٠ مليون مترٍ لكل ثانيةٍ تقريبًا.

أ) أكمل حسابات تحويل ٣ كيلوجرامات كاملة من البنزين إلى طاقة.

ب) ماذا يحدث للطاقة إذا أصبحت كمية البنزين مثليْ ما كانت عليه؟

٥٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة بعض نواتج القوى.

أ) جدوليًا: انقل الجدول الآتي واستعمل الآلة الحاسبة لإكماله:

القوة	$٣^{٤}$	$٣^{٣}$	$٣^{٢}$	$٣^{١}$	$٣^{٠}$	$٣^{-١}$	$٣^{-٢}$	$٣^{-٣}$	$٣^{-٤}$
القيمة						$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٨١}$

ب) تحليليًا: ما قيمتا ٥^{٠}، ٥$^{-١}$؟ تحقق من تخمينك باستعمال الآلة الحاسبة.

جـ) تحليليًا: أكمل: لأي عدد غير صفري أ، وأي عدد صحيح ن، أ$^{-ن}$ = _____ .

د) لفظيًا: ما قيمة عدد غير الصفر مرفوع للأس صفر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٥١) **تحدٍّ:** بسّط العبارة $\left(-\frac{أ^{م}}{ب^{ن}}\right)^{٢ن}$ موضحًا كل خطوة، علمًا بأن: أ، ب عددان حقيقيان غير صفريين، م ، ن عددان صحيحان.

٥٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث عبارات مختلفة يمكن تبسيطها إلى س^{٦}.

٥٣) **اكتب:** اكتب صيغتين تحوي كل منهما وحيدة حد. وفسّر كيف تستعمل كلًّا منهما في مسائل من واقع الحياة.

تدريب على اختبار

٥٤) أي العبارات الآتية ليست وحيدة حد؟

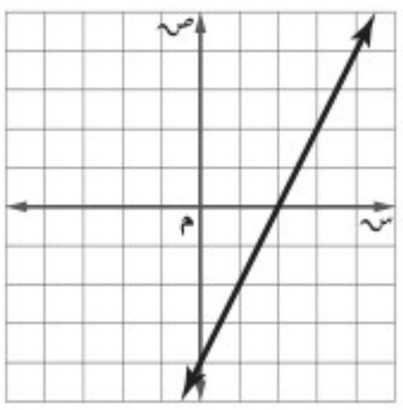
أ) –٦س ص

ب) $\frac{١}{٢}أ^{٢}$

جـ) $-\frac{١}{٢ب^{٣}}$

د) ٥جـ هـ^{٤}

٥٥) **إجابة قصيرة:** إذا كان ميل المستقيم موجبًا، ومقطعه الصادي سالبًا، فماذا يحدث للمقطع السيني إذا ضوعف كل من المقطع الصادي والميل؟



مراجعة تراكمية

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة المعطاة والموازي للمستقيم المعطاة معادلته في كل مما يأتي بصيغة الميل والمقطع: (الدرس ٣-٤)

٥٦) (–٣، ٢) ، ص = س–٦

٥٧) (٢، –١)، ص=٢س+٢

٥٨) (–٥، –٤)، ص = $\frac{١}{٢}$ س +١

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ١-٢)

٥٩) ٧س = –٢٨

٦٠) $-\frac{٢}{٥}$ ص = ١٠

٦١) $\frac{٢}{٣}$ س = ٧

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد ناتج القسمة في كلٍّ مما يأتي:

٦٢) –٦٤ ÷ (–٨)

٦٣) –٧٨ ÷ ١,٣

٦٤) ٤٢,٣ ÷ (–٦)

٦٥) –٢٣,٩٤ ÷ ١٠,٥

٦٦) –٣٢,٥ ÷ (–٢,٥)

٦٧) –٩٨,٤٤ ÷ ٤,٦

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٦-٢

قسمة وحيدات الحد

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحد.

والآن

- أجد ناتج قسمة وحيدتي حد.
- أبسّط عبارات تحتوي أسسًا سالبة أو صفرية.

المفردات

الأس الصفري

الأسس السالبة

رتبة المقدار

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا ؟

بلغ عدد سكان منطقة مكة المكرمة في عام ١٤٣٨ هـ ٨٣٢٥٣٠٤ نسمة أي عشرة مليون نسمة تقريباً أو $١٠^{٧}$، وبلغ عدد سكان منطقة القصيم في العام نفسه ١٣٨٧٩٩٦ نسمة أي مليون نسمة تقريباً أو $١٠^{٦}$ فتكون نسبة عدد سكان منطقة مكة المكرمة إلى عدد سكان منطقة القصيم في تلك السنة هي:

$\frac{١٠^{٧}}{١٠^{٦}} = ١٠^{١}$ وهذا يعني أن عدد سكان منطقة مكة المكرمة يساوي ١٠ أمثال عدد سكان منطقة القصيم.

قسمة وحيدات الحد: يمكنك استعمال مبادئ اختصار الكسور الاعتيادية؛ لإيجاد ناتج قسمة وحيدتي حد مثل $\frac{١٠^{٦}}{١٠^{٥}}$، انظر إلى نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$٣^{٢} = ٢ \times ٢ \times ٢ = \frac{٢ \times ٢ \times ٢ \times \cancel{٢} \times \cancel{٢} \times \cancel{٢} \times \cancel{٢}}{\cancel{٢} \times \cancel{٢} \times \cancel{٢} \times \cancel{٢}} = \frac{٢^{٧}}{٢^{٤}}$$

٧ عوامل — ٤ عوامل — ٤ عوامل

$$\frac{ن^{٤}}{ن^{٣}} = \frac{\cancel{ن} \times \cancel{ن} \times \cancel{ن} \times ن}{\cancel{ن} \times \cancel{ن} \times \cancel{ن}} = ن$$

٤ عوامل — ٣ عوامل

ويبيِّن المثالان السابقان خاصية قسمة القوى.

مفهوم أساسي

قسمة القوى

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: عند قسمة قوتين لهما الأساس نفسه اطرح أُسَّيهما (أس البسط – أس المقام).

الرموز: لأي عدد حقيقي أ ≠ ٠؛ وأي عددين صحيحين م، ن، فإن: $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$.

أمثلة: $\frac{جـ^{١١}}{جـ^{٨}} = جـ^{١١-٨} = جـ^{٣}$ $\qquad \frac{ر^{٥}}{ر^{٢}} = ر^{٥-٢} = ر^{٣}$

مثال ١

قسمة القوى

بسّط العبارة $\frac{جـ^{٣}هـ^{٥}}{جـهـ^{٢}}$ مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا .

$\frac{جـ^{٣}هـ^{٥}}{جـهـ^{٢}} = \left(\frac{جـ^{٣}}{جـ}\right)\left(\frac{هـ^{٥}}{هـ^{٢}}\right)$ — جمِّع القوى ذات الأساس نفسه

$= (جـ^{٣-١})(هـ^{٥-٢})$ — اقسم القوى

$= جـ^{٢}هـ^{٣}$ — بسّط

تحقق من فهمك

١أ) $\frac{س^{٣}ص^{٤}}{س^{٢}ص}$ $\qquad$ ١ب) $\frac{ك^{٧}م^{١٠}ب}{ك^{٥}م^{٣}ب}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

يمكنك استعمال تعريف القوى لإيجاد ناتج قوى قسمة وحيدات الحد، انظر نمط الأسس في المثالين الآتيين:

$$\frac{٣^{٣}}{٤^{٣}} = \frac{\overbrace{٣ \times ٣ \times ٣}^{\text{٣ عوامل}}}{\underbrace{٤ \times ٤ \times ٤}_{\text{٣ عوامل}}} = \overbrace{\left(\frac{٣}{٤}\right)\left(\frac{٣}{٤}\right)\left(\frac{٣}{٤}\right)}^{\text{٣ عوامل}} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣}$$

$$\frac{جـ^{٢}}{د^{٢}} = \frac{\overbrace{جـ \times جـ}^{\text{عاملان}}}{\underbrace{د \times د}_{\text{عاملان}}} = \overbrace{\left(\frac{جـ}{د}\right)\left(\frac{جـ}{د}\right)}^{\text{عاملان}} = \left(\frac{جـ}{د}\right)^{٢}$$

إرشادات للدراسة

قوانين القوة للمتغيرات

تطبق قوانين القوة على المتغيرات تمامًا كما تطبق على الأعداد. فمثلاً

$$\left(\frac{أ٣}{٤ب}\right)^{٣} = \frac{(أ٣)^{٣}}{(٤ب)^{٣}} = \frac{أ^{٣}٢٧}{ب^{٣}٦٤}$$

مفهوم أساسي قوى القسمة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد قوة ناتج قسمة، أوجد كلًّا من قوة البسط وقوة المقام.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب ≠ صفر؛ وأي عدد صحيح م فإن: $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$

أمثلة: $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤} = \frac{٣^{٤}}{٥^{٤}}$ $\qquad \frac{ر^{٥}}{ن^{٥}} = \left(\frac{ر}{ن}\right)^{٥}$

مثال ٢ قوى القسمة

بسّط العبارة: $\left(\frac{٣م^{٣}}{٧}\right)^{٢}$.

$\left(\frac{٣م^{٣}}{٧}\right)^{٢} = \frac{(٣م^{٣})^{٢}}{٧^{٢}}$ — قوى القسمة

$= \frac{٣^{٢}(م^{٣})^{٢}}{٧^{٢}}$ — قوة حاصل الضرب

$= \frac{٩م^{٦}}{٤٩}$ — قوة القوة

تحقق من فهمك

٢أ) $\left(\frac{٣س^{٤}}{٤}\right)^{٣}$ $\qquad$ ٢ب) $\left(\frac{٢ص^{٢}}{٣ع^{٣}}\right)^{٢}$ $\qquad$ ٢جـ) $\left(\frac{٤س^{٣}}{٥ص^{٤}}\right)^{٣}$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لاستكشاف عبارات مرفوعة **للأس الصفري** مثل: $٣^{٠}$، $س^{٠}$، ... ويوجد طريقتان لتفسير لماذا تعطي الآلة الحاسبة $٣^{٠} = ١$

الطريقة ١

$\frac{٣^{٥}}{٣^{٥}} = ٣^{٥-٥}$ — ناتج قسمة القوى

$= ٣^{٠}$ — بسّط

الطريقة ٢

$\frac{٣^{٥}}{٣^{٥}} = \frac{\cancel{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣}}{\cancel{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣}}$ — تعريف القوى

$= ١$ — بسّط

وبما أن للعبارة $\frac{٣^{٥}}{٣^{٥}}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن $٣^{٠} = ١$

أيْ أن الأس الصفري لأيِّ عددٍ لا يساوي الصفر هو الواحد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خاصية الأس الصفري

التعبير اللفظي: أي عدد غير الصفر مرفوع للقوة صفر يساوي ١

الرموز: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي صفرًا فإن: أ^{٠} = ١

أمثلة: ١٥^{٠} = ١ ، $\left(\frac{ب}{جـ}\right)^{٠}$ = ١ ، $\left(\frac{٢}{٧}\right)^{٠}$ = ١

مثال ٣

الأس الصفري

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $\left(-\frac{٤ن^{٢}ك^{٥}ر^{٢}}{٩ن^{٣}ك^{٢}ر}\right)^{٠}$

$\left(-\frac{٤ن^{٢}ك^{٥}ر^{٢}}{٩ن^{٣}ك^{٢}ر}\right)^{٠}$ = ١ — أ^{٠} = ١

ب) $\frac{س^{٥}ص^{٠}}{س^{٣}}$

$\frac{س^{٥}ص^{٠}}{س^{٣}} = \frac{س^{٥}(١)}{س^{٣}}$ — أ^{٠} = ١

= س^{٢} — اقسم القوى

تحقق من فهمك

٣أ) $\frac{ب^{٤}جـ^{٢}د^{٠}}{ب^{٢}جـ}$

٣ب) $\left(\frac{٢ن^{٤}جـ^{٧}هـ^{٣}}{١٥ن^{٣}جـ^{٩}هـ^{٦}}\right)^{٠}$

إرشادات للدراسة

الأس الصفري

انتبه للأقواس عند تبسيط أي عبارة.

فالعبارة (٥س)^{٠} تساوي ١ إلا أن العبارة ٥س^{٠} = ٥

الأسس السالبة: قد تكون **الأسس سالبة** مثل: ٣$^{-٢}$ ، س$^{-٣}$ ، ... ، ولاستقصاء معناها يمكنك تبسيط عبارات مثل $\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$ باستعمال الطريقتين الآتيتين:

الطريقة ١

$\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$ = س$^{٢-٥}$ — ناتج قسمة القوى

= س$^{-٣}$ — بسّط

الطريقة ٢

$\frac{س^{٢}}{س^{٥}} = \frac{س \times س}{س \times س \times س \times س \times س}$ — تعريف القوى

$= \frac{١}{س^{٣}}$ — بسّط

بما أن للعبارة $\frac{س^{٢}}{س^{٥}}$ قيمة واحدة فقط، لذا نستنتج أن س$^{-٣}$ = $\frac{١}{س^{٣}}$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خاصية الأسس السالبة

التعبير اللفظي: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر، ولأي عدد صحيح ن، فإن مقلوب أ^{ن} هو أ$^{-ن}$، ومقلوب أ$^{-ن}$ هو أ^{ن}.

الرموز: لأي عدد حقيقي أ لا يساوي الصفر ، وأي عدد صحيح ن، فإن: أ$^{-ن}$ = $\frac{١}{أ^{ن}}$ ، $\frac{١}{أ^{-ن}}$ = أ^{ن}.

أمثلة: ٢$^{-٤}$ = $\frac{١}{٤^{٢}}$ = $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{جـ^{-٤}}$ = جـ^{٤}

تُعد العبارة في أبسط صورة لها إذا احتوت على أسس موجبة فقط، وظهر كل أساس مرة واحدة فقط، ولا تتضمن قوى القوى، وأن تكون جميع الكسور الاعتيادية فيها في أبسط صورة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٤ الأسس السالبة

بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

أ) $\frac{ن^{-٥}ف^{٤}}{ر^{-٢}}$

$\frac{ن^{-٥}ف^{٤}}{ر^{-٢}} = \left(\frac{١}{ن^{-٥}}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{١}{ر^{-٢}}\right)$ اكتب العبارة على صورة حاصل ضرب كسور اعتيادية

$= \left(\frac{١}{ن^{٥}}\right)\left(\frac{ف^{٤}}{١}\right)\left(\frac{ر^{٢}}{١}\right)$ $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $\frac{١}{أ^{-ن}} = أ^{ن}$

$= \frac{ف^{٤}ر^{٢}}{ن^{٥}}$ اضرب

ب) $\frac{٢د^{٢}ب^{٣}جـ^{-٥}}{١٠د^{-٣}ب^{-١}جـ^{-٤}}$

$\frac{٢د^{٢}ب^{٣}جـ^{-٥}}{١٠د^{-٣}ب^{-١}جـ^{-٤}} = \left(\frac{٢}{١٠}\right)\left(\frac{د^{٢}}{د^{-٣}}\right)\left(\frac{ب^{٣}}{ب^{-١}}\right)\left(\frac{جـ^{-٥}}{جـ^{-٤}}\right)$ جمّع القوى للأساس نفسه

$= \left(\frac{١}{٥}\right)(د^{٢-(-٣)})(ب^{٣-(-١)})(جـ^{-٥-(-٤)})$ اقسم القوى، خاصية الأسس السالبة

$= \frac{١}{٥}د^{٥}ب^{٤}جـ^{-١}$ بسّط

$= \frac{١}{٥}(د^{٥})(ب^{٤})\left(\frac{١}{جـ}\right)$ خاصية الأسس السالبة

$= \frac{د^{٥}ب^{٤}}{٥جـ}$ اضرب

تحقق من فهمك

٤أ) $\frac{ف^{-٣}و س^{٢}}{و ص^{-٦}}$ ٤ب) $\frac{٣٢د^{-٨}ب^{٣}جـ^{-٤}}{٤د^{٣}ب^{٥}جـ^{-٢}}$ ٤جـ) $\frac{٥جـ^{-٣}ك^{٢}م^{-٦}}{٢٥ك^{-٤}م^{-٢}}$

تستعمل **رتبة المقدار** لمقارنة المقادير وتقدير الحسابات وإجرائها بسرعة، وتعبر عن العدد مقرّبًا إلى أقرب قوى العشرة. فمثلاً العدد ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠ مقرَّبًا إلى أقرب قوى العشرة هو $١٠^{١١}$ أو ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠، لذا فإن رتبة المقدار ٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠ هي $١٠^{١١}$.

مثال ٥ من واقع الحياة تطبيق خواص الأسس

طول: افترض أن معدل طول الرجل ١,٧ متر، ومعدل طول النملة هو ٠,٠٠٠٨ متر. فكم مرة تقريبًا يساوي طول الرجل بالنسبة لطول النملة؟

افهم: علينا إيجاد رتبة طول كل من الرجل والنملة، ثم إيجاد النسبة بينهما.

خطّط: قرّب كل طول إلى أقرب قوة للعدد ١٠، ثم أوجد نسبة طول الرجل إلى طول النملة.

حل: بما أن معدل طول الرجل قريب من ١ متر؛ لذا تكون رتبة طوله هي $١٠^{٠}$ أمتار.
وبما أن معدل طول النملة يساوي ٠,٠٠١ متر تقريبًا؛ لذا فرتبة طول النملة هي $١٠^{-٣}$ أمتار.

الربط مع الحياة

يوجد أكثر من ١٤٠٠٠ نوع من النمل في الكرة الأرضية.

وبعضها يستطيع حمل أشياء كتلتها تعادل كتلة النملة ٥٠ مرة.

إرشادات للدراسة

الإشارة السالبة

تأكد من موقع الإشارة السالبة. فمثلاً، $٥^{-١} = \frac{١}{٥}$، في حين أن $-٥^{١} \neq \frac{١}{٥}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

نسبة طول الرجل إلى طول النملة يساوي تقريبًا $\frac{١٠^{٠}}{١٠^{-٣}}$

$\frac{١٠^{٠}}{١٠^{-٣}} = ١٠^{٠-(-٣)}$ — اقسم القوى

$= ١٠^{٣}$ — $٠ - (-٣) = ٠ + ٣ = ٣$

$= ١٠٠٠$ — بسّط

لذا فطول الرجل يساوي ١٠٠٠ مرة من طول النملة تقريبًا. أو نسبة طول الرجل إلى طول النملة تساوي تقريبًا القوة الثالثة للعشرة.

تحقق: نسبة طول الرجل إلى طول النملة هي $\frac{١,٧}{٠,٠٠٠٨} = ٢١٢٥$ وأقرب قوى العشرة للعدد ٢١٢٥ هي $١٠^{٣}$ ✓

تحقق من فهمك

٥) **علم الفلك:** رتبة مقدار كل من كتلة الأرض ودرب التبانة لأقرب قوى العشرة هي: $١٠^{٢٧}$، $١٠^{٤٤}$ على الترتيب. فكم مرة تساوي رتبة مقدار كتلة درب التبانة رتبة مقدار كتلة الأرض؟

تأكد

الأمثلة ١-٤ بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

١) $\frac{هـ^{٥}ل^{٤}}{هـ^{٢}ل}$ ٢) $\frac{م^{٦}ر^{٥}ب^{٣}}{م^{٥}ر^{٢}ب^{٣}}$ ٣) $\frac{ب^{٤}جـ^{٦}ن^{٨}}{ب^{٤}جـ^{٣}ن^{٥}}$ ٤) $\frac{جـ^{٨}هـ^{٢}م}{هـ جـ^{٧}}$

٥) $\frac{ر^{٤}ن^{٧}ف^{٢}}{ن^{٧}ف^{٢}}$ ٦) $\frac{س^{٣}ص^{٢}ع^{٦}}{ع^{٥}س^{٢}ص}$ ٧) $\frac{ن^{٤}ك^{٤}و^{٦}}{ك^{٢}ن^{٣}و}$ ٨) $\frac{ر^{٣}ف^{-٢}}{ن^{-٧}}$

٩) $\left(\frac{٢جـ^{٣}د^{٥}}{٥هـ^{٢}}\right)^{٥}$ ١٠) $\left(-\frac{٣س ص^{٤}ع^{٢}}{س^{٣}ص ع^{٤}}\right)^{٠}$ ١١) $\frac{٤ر^{٢}ف^{٠}هـ^{٥}}{٢ر هـ^{٣}}$ ١٢) $\frac{ف^{-٣}جـ^{٢}}{هـ^{-٤}}$

مثال ٥ ١٣) **إنترنت:** ارتفع عدد مستعملي الإنترنت في المملكة من ١١٠٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٣١ هـ إلى ٢٤٠٠٠٠٠٠ شخص عام ١٤٣٨ هـ. حدّد نسبة عدد مستعملي الإنترنت عام ١٤٣٨ هـ إلى مستعمليه عام ١٤٣١ هـ باستعمال رتبة المقدار للعامين.

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٤ بسّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

١٤) $\frac{م^{٤}ن^{٢}}{م^{٢}ن}$ ١٥) $\frac{جـ^{٤}د^{٤}هـ^{٣}}{جـ^{٢}د^{٤}هـ^{٣}}$ ١٦) $\left(\frac{٣س ص^{٤}}{ع^{٥}}\right)^{٢}$ ١٧) $\frac{س^{-٤}ص^{٩}}{ع^{-٢}}$

١٨) $\frac{أ^{٧}ب^{٨}جـ^{٨}}{أ^{٥}بجـ^{٧}}$ ١٩) $\left(-\frac{٥ن^{٩}جـ^{٤}هـ^{٢}}{ن جـ^{٢}هـ^{٣}}\right)^{٠}$ ٢٠) $\frac{ل^{١٢}ن^{٧}ر^{٢}}{ل^{٢}ن^{٧}ر}$ ٢١) $\frac{٥جـ^{٢}د^{٥}}{٨جـ^{٠}د^{٥}ن^{٠}}$

٢٢) $\frac{-٢ن^{٣}جـ^{٢}هـ^{٠}}{٨ن^{٢}جـ^{٢}}$ ٢٣) $\frac{١٢م^{-٤}ل^{٢}}{-١٥م^{٣}ل^{-٩}}$ ٢٤) $\left(\frac{أ^{-٢}ب^{٤}جـ^{٥}}{أ^{-٤}ب^{-٤}جـ^{٣}}\right)^{٢}$ ٢٥) $\frac{ر^{٣}ن^{-١}ص^{-٥}}{ن س^{٥}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٥

٢٦) **حواسيب:** وصلت سرعة معالج الحاسوب عام ١٤١٤ هـ إلى $١٠^{٨}$ عملية في الثانية تقريبًا. وازدادت هذه السرعة إلى أكثر من $(١٠)^{١٠}$ عملية في الثانية عام ١٤٣٨هـ. فبكم مرة يكون الحاسوب الجديد أسرع من القديم؟

٢٧) **تمثيلات متعددة:** تستعمل الصيغة م = ط نق^{٢} لإيجاد مساحة الدائرة، وتستعمل الصيغة م = ل^{٢} لإيجاد مساحة المربع الذي طول ضلعه ل. استخدم الشكل المجاور للإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ) جبريًا: أوجد نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع.

ب) جبريًا: إذا ضُرب كل من نصف قطر الدائرة وطول ضلع المربع في العدد ٢، فما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟

جـ) جدوليًا: أكمل الجدول المقابل.

د) تحليليًا: ما الاستنتاج الذي توصلت إليه؟

نصف القطر	مساحة الدائرة	مساحة المربع	النسبة
نق			
٢نق			
٣نق			
٤نق			
٥نق			

الربط مع الحياة

حواسيب: تتعدد أنواع الحواسيب من حيث طريقة عملها وحجمها وسرعتها. وكانت الحواسيب الإلكترونية في حجم غرفة كبيرة، وتستهلك طاقة مماثلة لما يستهلكه مئات الحواسيب الشخصية اليوم. بينما يمكن الآن صنع حواسيب داخل ساعة يد تأخذ طاقاتها من بطارية الساعة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٨) **تبرير:** هل المعادلة "س^{ص} × س^{ع} = س$^{ص ع}$" صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا ؟ فسّر إجابتك.

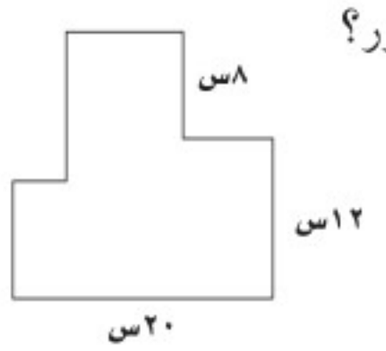
٢٩) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا لوحيدتي حد يكون ناتج قسمتهما ٢٤ أ^{٢} ب^{٣}

٣٠) **تحدٍّ:** استعمل خاصية قسمة القوى لتفسير المساواة س$^{-ن}$ = $\frac{١}{\text{س}^{ن}}$

٣١) **اكتب:** وضِّح كيف تستعمل خاصية قسمة القوى وخاصية قوى القسمة؟

تدريب على اختبار

٣٢) **هندسة:** ما محيط الشكل المجاور؟



أ) ٤٠س جـ) ١٦٠س

ب) ٨٠س د) ٤٠٠س

٣٣) بسِّط العبارة: (٤$^{-٢}$ × ٠٫٥ × ٦٤)^{٣}

أ) $\frac{١}{٦٤}$ جـ) ٣٢٠

ب) ٦٤ د) ١٠٢٤

مراجعة تراكمية

٣٤) **علم الأرض:** موجة زلزال قوته ٦ أكبر من موجة زلزال قوته ٤ بِـ ١٠^{٢} مرات. وموجة زلزال قوته ٤ تساوي ١٠ أمثال موجة زلزال قوته ٣ فكم مرة تساوي موجة زلزال قوته ٦ موجة زلزال قوته ٣؟ (الدرس ٦-٢)

حلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وتحقَّق من صحة الحل: (الدرسان ٤-٣ و٤-٤)

٣٥) ٥(٢هـ − ٦) > ٤هـ

٣٦) ٢٢ ≤ ٤(ب − ٨) + ١٠

٣٧) ٥(ب − ٨) ≥ ٣(ب + ١٠)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: بسّط كلَّ عبارةٍ فيما يأتي:

٣٨) ٣س + ١٠س

٣٩) ٥أ − ٢ + ٦أ

٤٠) ٤ص^{٢} + ص + ١٥ص^{٢}

٤١) ١٣ (٥ + ٤أ)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٦-٣

كثيرات الحدود

فيما سبق

درستُ تمييز وحيدات الحد وخصائصها.

والآن

- أجد درجة كثيرة الحدود.
- أكتب كثيرة حدود بالصورة القياسية.

المفردات

كثيرة حدود
ثنائية الحد
ثلاثية الحدود
درجة وحيدة الحد
درجة كثيرة الحدود
الصورة القياسية لكثيرة الحدود
المعامل الرئيس

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا ؟

سجِّلت مبيعات الأجهزة الذكية عالميًا أرقامًا قياسية في المبيعات عام ٢٠١٧ م. ويمكن تمثيل عدد المبيعات بالمعادلة:

ع = $-٢,٧$ ن^{٢} + ٤٩,٤ ن + ١٢٨,٧

علمًا بأن ع تمثِّل عدد الأجهزة التي يتم بيعها بالملايين، ن تمثِّل عدد السنوات منذ عام ٢٠٠٥ م.

تمثّل العبارة $-٢,٧$ن^{٢} + ٤٩,٤ن + ١٢٨,٧ مثالاً على كثيرة حدود. ويمكن استعمال كثيرات الحدود لتمثيل بعض المواقف.

درجة كثيرة الحدود: **كثيرة الحدود** هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد. تُسمى كل وحيدة حد منها حدًّا في كثيرة الحدود. وبعض كثيرات الحدود تحمل أسماءً خاصة. **فثنائية الحد** هي مجموع وحيدتي حد في أبسط شكل، و**ثلاثية الحدود** هي مجموع ثلاث وحيدات حد في أبسط شكل.

مثال ١ تمييز كثيرات الحدود

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنفها إلى وحيدة حدّ، أو ثنائية حد ، أو ثلاثية حدود:

العبارة	هل هي كثيرة حدود؟	وحيدة حد / ثنائية حد / ثلاثية حدود
أ) ٤ص - ٥س ع	نعم؛ ٤ص -٥س ع هي مجموع وحيدتي حد هما: ٤ص، -٥س ع.	ثنائية حد
ب) $-٦,٥$	نعم؛ $-٦,٥$ عدد حقيقي.	وحيدة حد
جـ) ٧أ$^{-٣}$ + ٩ب	لا؛ ٧أ$^{-٣} = \frac{٧}{أ^{٣}}$، وهي ليست وحيدة حد.	—
د) ٦س^{٣} + ٤س + س + ٣	نعم؛ ٦س^{٣} + ٤س + س + ٣ = ٦س^{٣} + ٥س + ٣، مجموع ثلاثة حدود.	ثلاثية حدود

تحقق من فهمك

١أ) س

١ب) -٣ص^{٢} -٢ص + ٤ص -١

١جـ) ٥ر س + ٧ ن ف ك

١د) ١٠س$^{-٤}$ -٨س^{أ}

درجة وحيدة الحد هي مجموع أسس كل متغيراتها. ودرجة الثابت غير الصفر تساوي صفرًا. وليس للصفر درجة. أما درجة كثيرة الحدود فهي أكبر درجة لأي حدٍّ من حدودها. ولإيجاد درجة كثيرة حدود، يتعين عليك أولاً إيجاد درجة كل حد فيها. ويمكن تسمية بعض كثيرات الحدود اعتمادًا على درجتها: الدرجة صفر: ثابتة، وذات الدرجة ١: خطية، وذات الدرجة ٢: تربيعية، وذات الدرجة ٣: تكعيبية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٢ درجة كثيرة الحدود

أوجد درجة كثيرة الحدود ٢د^{٣} – ٩جـ^{٥} د – ٧

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

درجة الحد ٢د^{٣} = ٣، درجة الحد –٩جـ^{٥} د = ٥ + ١ = ٦،

درجة الحد –٧ هي صفر.

الخطوة ٢: درجة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد من حدودها، وتساوي ٦

تحقق من فهمك

٢أ) ٧س ص^{٥} ع **٢ب)** ٢م ن – ٣ م ن^{٢} – ٧م^{٢} ن^{٢} – ١٣

كثيرات الحدود بالصورة القياسية: يمكنك كتابة كثيرة الحدود بأي ترتيب. ولاستخدام **الصورة القياسية لكثيرة الحدود** بمتغير واحد، اكتب الحدود بترتيب تنازلي بحسب درجتها. وعندما تُكتب كثيرة الحدود بالصورة القياسية، فإن معامل أول حد فيها يُسمى **المعامل الرئيس**.

المعامل الرئيس ← ٤س^{٣} ← أكبر درجة

الصورة القياسية: ٤س^{٣} – ٥س^{٢} + ٢س + ٧

مثال ٣ الصورة القياسية لكثيرة الحدود

اكتب كثيرة الحدود ٥ص –٩– ٢ص^{٤} –٦ ص^{٣} بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها.

الخطوة ١: أوجد درجة كل حد.

الدرجة:	١	٠	٤	٣
كثيرة الحدود:	٥ص	– ٩	– ٢ص^{٤}	– ٦ص^{٣}

الخطوة ٢: اكتب الحدود بترتيب تنازلي لدرجاتها: –٢ص^{٤} – ٦ص^{٣} + ٥ص –٩ فيكون المعامل الرئيس هو –٢

تحقق من فهمك

٣أ) ٨ – ٢س^{٢} + ٤س^{٤} – ٣س **٣ب)** ص + ٥ص^{٣} – ٢ص^{٢} – ٧ص^{٦} + ١٠

الربط مع الحياة

تعتبر المملكة العربية السعودية أكبر منتج للأسمنت في منطقة الخليج، وصاحبة ثاني أكبر طاقة إنتاجية في الشرق الأوسط، وتُعد صناعة الأسمنت في المملكة من الأنشطة ذات الربحية العالية.

ويمكنك استعمال كثيرات الحدود لتقدير القيم بين سنتين، وللتنبؤ بقيم الحوادث قبل وقوعها أيضًا.

مثال ٤ من واقع الحياة استعمال كثيرات الحدود

مصانع: تمثِّل المعادلة ع= ٣ن^{٢} – ٢ن + ١٠ عدد أطنان الأسمنت بمئات الألوف التي أنتجها أحد المصانع من عام ١٤٣٣ هـ إلى ١٤٣٨ هـ، حيث ن عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ، فما عدد أطنان الأسمنت المنتجة حتى بداية عام ١٤٣٥ هـ؟

أوجد قيمة ن وعوض بها في المعادلة لإيجاد عدد أطنان الأسمنت.

بما أن ن تمثِّل عدد السنوات منذ عام ١٤٣٣ هـ، فإن: ن = ١٤٣٥ – ١٤٣٣ = ٢

ع = ٣ن^{٢} − ٢ن + ١٠	المعادلة الأصلية
= ٣(٢)^{٢} − ٢ (٢) + ١٠	ن = ٢
= ٣ (٤) − ٤ + ١٠	بسطّ
= ١٢ − ٤ + ١٠ = ١٨	اضرب وبسّط

بما أن ع بمئات الألوف، فإن عدد الأطنان المنتجة كان ١٨ مئة ألفٍ، أو ١٨٠٠٠٠٠ .

تحقق من فهمك

٤أ) كم طنًّا أُنتج عام ١٤٣٨ هـ؟

٤ب) إذا استمر هذا النمط، فكم طنًّا سيتم إنتاجه عام ١٤٤٨ هـ؟

تأكد

مثال ١ **حدّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنِّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:**

١) ٢ص − ٥ + ٣ص^{٢} **٢)** ٣س^{٢} **٣)** ٥م^{٢} ن^{٣} + ٦ **٤)** ٥ك$^{-٤}$ + ٦ك

مثال ٢ **أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:**

٥) −٣ **٦)** ٦ن^{٣} − ن^{٤} **٧)** −٧ع **٨)** $\frac{٣}{٤}$

٩) ١٢ − ٧ك^{٢}ن + ٨ ن **١٠)** ٢أ^{٢} ب^{٥} + ٥ − أب **١١)** ٦دن^{٣} + ٣ د^{٢}ن^{٢} + ٢د + ١

مثال ٣ **اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها:**

١٢) −ص^{٣} + ٣ص − ٣ص^{٢} + ٢ **١٣)** ٤ع − ٢ع^{٢} − ٥ع^{٤} **١٤)** ٢أ + ٤أ^{٣} − ٥أ^{٢} − ١

مثال ٤ **١٥) جامعات:** افترض أنه يمكن تمثيل عدد الطلاب المسجَّلين في جامعة من عام ١٤٣٠ هـ إلى ١٤٣٩ هـ بالمئات بالمعادلة ن = س^{٢} + ٥ , ١ س + ٥ , ٠، حيث س عدد السنوات منذ عام ١٤٣٠ هـ.

أ) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٥ هـ؟

ب) ما عدد الطلاب الذين تم تسجيلهم في الجامعة في عام ١٤٣٧ هـ؟

تدرب وحل المسائل

مثال ١ **حدِّد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك فصنّفها إلى وحيدة حد، أو ثنائية حد، أو ثلاثية حدود:**

١٦) $\frac{٥ص^{٣}}{س^{٢}}$ + ٤ س **١٧)** ٢١ **١٨)** جـ^{٤} − ٢جـ^{٢} + ١

١٩) د + ٣د$^{-}$جـ **٢٠)** أ − أ^{٢} **٢١)** ٥ن^{٣} + ن ك^{٣}

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال٢ أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي:

٢٢) $١٣ - ٤أب + ٥أ^{٣}ب$ **٢٣)** $٣س - ٨$ **٢٤)** -٤

٢٥) $١٧جـ^{٢}هـ$ **٢٦)** $١٠ + ٢جـ د^{٤} - ٦ د^{٢}جـ$ **٢٧)** $٢ع^{٢}ص^{٢} - ٧ + ٥ص^{٣}ن^{٤}$

مثال ٣ اكتب كل كثيرة حدود فيما يأتي بالصورة القياسية، وحدِّد المعامل الرئيس فيها:

٢٨) $٥س^{٢} - ٢ + ٣س$ **٢٩)** $٨ص + ٧ص^{٣}$ **٣٠)** $٤ - ٣جـ - ٥جـ^{٢}$

٣١) $-٤د^{٤} + ١ - د^{٢}$ **٣٢)** $\frac{١}{٢}س - ٣س^{٤} + ٧$ **٣٣)** $-٩ب^{٢} + ١٠ب - ب^{٦}$

مثال ٤ **٣٤) ألعاب نارية:** أطلق صاروخ ألعاب نارية من ارتفاع ١م من الأرض وبسرعة ١٥٠ م/ ث. ويمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ ع بعد ن ثانية بالمعادلة $ع = -٥ن^{٢} + ٥٠ن + ١$

أ) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٣ ثوانٍ؟

ب) ما الارتفاع الذي يصله الصاروخ بعد ٥ ثوانٍ؟

الربط مع الحياة

يتكون مكوك الفضاء من ثلاثة أجزاء: عربة مدارية للطاقم، وخزان خارجي للوقود، وجهازي دفع صاروخيين يعملان بالوقود الصلب. وتبلغ كتلة المكوك بالكامل ٤,٤ ملايين رطل عند انطلاقه.

٣٥) مشروع: يصمم طارق وعمر هيكل صاروخ، بحيث يكون الجزء العلوي منه على شكل مخروط، وجسمه على شكل أسطوانة نصف قطرها نق، كما في الشكل المجاور. إذا علمت أن حجم المخروط يساوي $\frac{١}{٣}$ ط × مربع نصف القطر (نق) × الارتفاع ($ع_{١}$)، وحجم الأسطوانة يساوي ط × مربع نصف القطر (نق) × الارتفاع ($ع_{٢}$).

أ) اكتب كثيرة حدود تمثل حجم الصاروخ.

ب) إذا كان ارتفاع جسم الصاروخ ٨سم، وارتفاع الجزء العلوي منه ٦سم، ونصف قطر القاعدة ٣سم، فما حجم الصاروخ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٦) تحد: إذا كان س عددًا صحيحًا، فاكتب كثيرة حدود تمثِّل العدد الصحيح الفردي، وفسّر ذلك.

٣٧) تبرير: وضِّح إذا كانت العبارة: "يمكن أن تكون درجة ثنائية الحد صفرًا" صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ وفسّر إجابتك.

٣٨) مسألة مفتوحة: اكتب مثالاً على ثلاثية حدود تكعيبية.

٣٩) اكتب: فسّر كيف تكتب كثيرة حدود على الصورة القياسية، وكيف تحدد المعامل الرئيس فيها؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدريب على اختبار

٤٠) **إجابة قصيرة:** إذا كان لديك بطاقة تخفيض بقيمة ٨ ريالات من أحد المتاجر، واشتريت أرزًا بـ ٥٩,٩٥ ريالًا، وعلبة جبن بـ ١٥,٩٥ ريالًا. فكم تدفع مقابل ذلك؟

٤١) ما قيمة ص التي تحقق نظام المعادلات أدناه؟

٢س + ص = ١٩، ٤س − ٦ص = −٢

أ) ٥ ب) ٨ جـ) ٧ د) ١٠

مراجعة تراكمية

بسِّط كل عبارة مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا: (الدرس ٦-٢)

٤٢) $أ^{٠}(أ^{٤})(أ^{-٨})$

٤٣) $\frac{(٤م^{-٣}جـ^{٦})^{٠}}{م جـ}$

٤٤) $\frac{(٣ن^{٢}جـ^{٦})^{٠}}{(١٨ن^{٦}جـ^{٢})^{٠}}$

٤٥) $\frac{(نك^{-١})^{٣}}{(ن^{٤}ك^{٨})^{-١}}$

٤٦) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (١، ٣) والمعامد للمستقيم ص = س بصيغة الميل والمقطع. (الدرس ٣-٤)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كل عبارة فيما يأتي إن أمكن، وإلَّا فاكتب "في أبسط شكل":

٤٧) $٧ب^{٢} + ١٤ب - ١٠ب$

٤٨) $٥ت + ١٢ت^{٢} - ٨ت$

٤٩) $٣ص^{٤} + ٢ص^{٤} + ٢ص^{٥}$

٥٠) $٧هـ^{٥} - ٧س^{٥} + ٨ك^{٥}$

٥١) $ن + \frac{ن}{٣} + \frac{٢}{٣}ن$

٥٢) $٢ل + \frac{ل}{٢} + ل^{٢}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

جمع كثيرات الحدود وطرحها

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

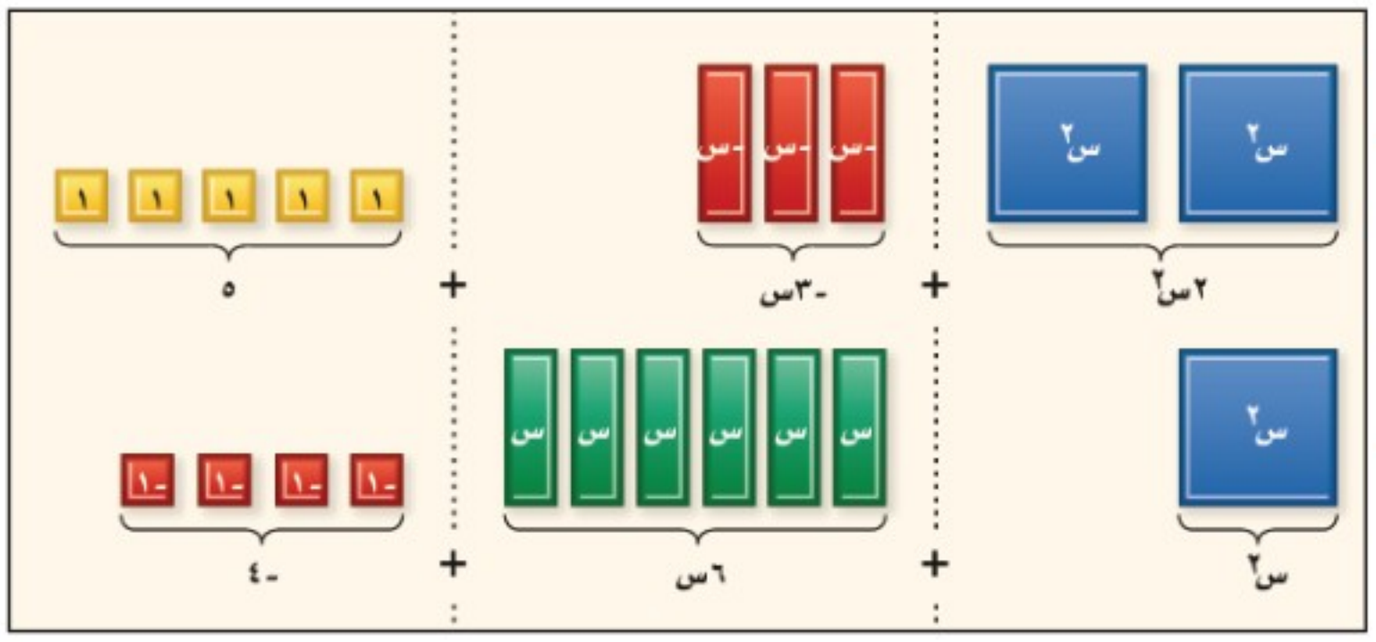
تُسمى وحيدات الحد مثل ٣س، −٢س حدودًا متشابهة؛ لأن لها المتغير والأس نفسيهما. ويمكنك تمييز الحدود المتشابهة عند استعمال بطاقات الجبر- انظر الجدول المجاور.

تمثيل كثيرات الحدود	
تمثل الحدود المتشابهة على صورة بطاقات لها نفس المساحة والشكل.	حدود متشابهة
يمكن تكوين الزوج الصفري بتجميع قطعة واحدة وَمعكوسها. ويمكنك حذف الزوج صفر أو إضافته دون تغيير كثيرة الحدود.	

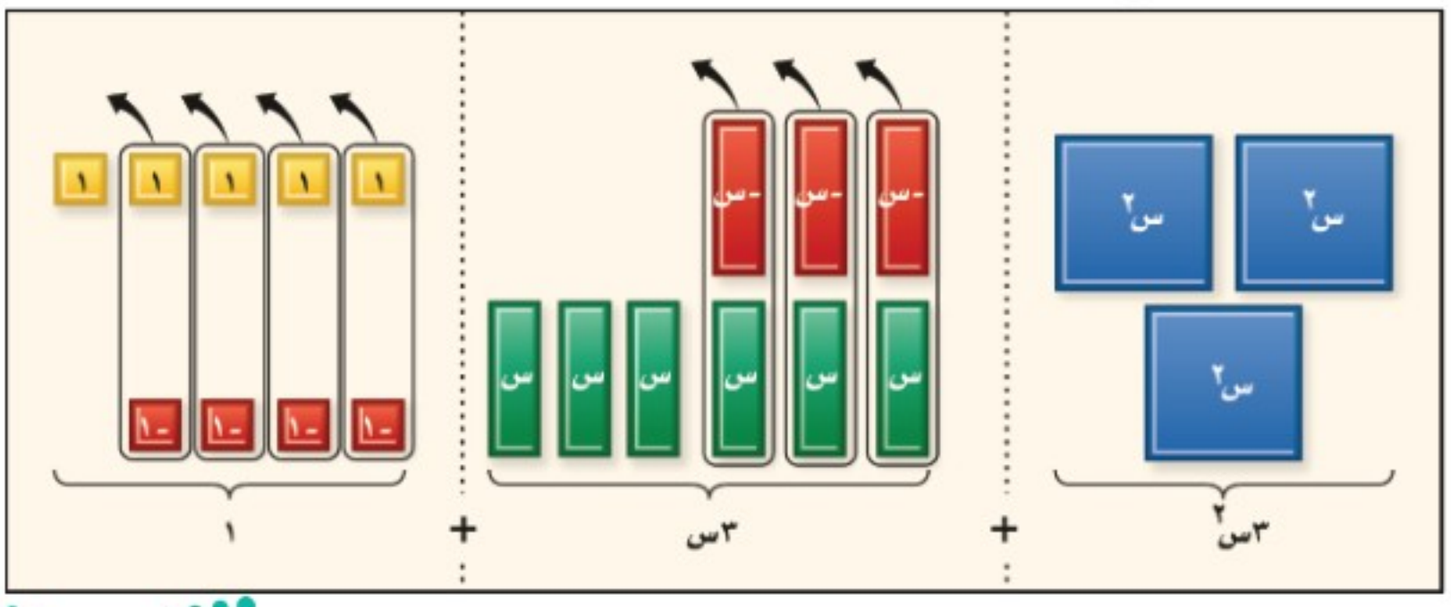
نشاط ١ جمع كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج $(٢س^{٢} - ٣س + ٥) + (س^{٢} + ٦س - ٤)$.

الخطوة ١: مثّل كلًّا من كثيرتي الحدود.



الخطوة ٢: جمّع الحدود المتشابهة، واحذف الأزواج الصفرية.



الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

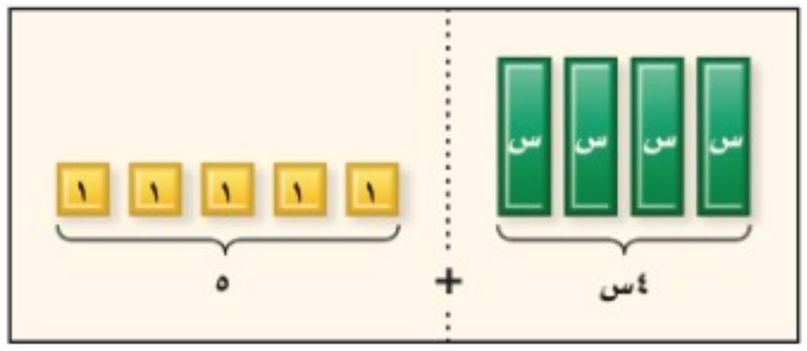
إذن $(٢س^{٢} - ٣س + ٥) + (س^{٢} + ٦س - ٤) = ٣س^{٢} + ٣س + ١$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

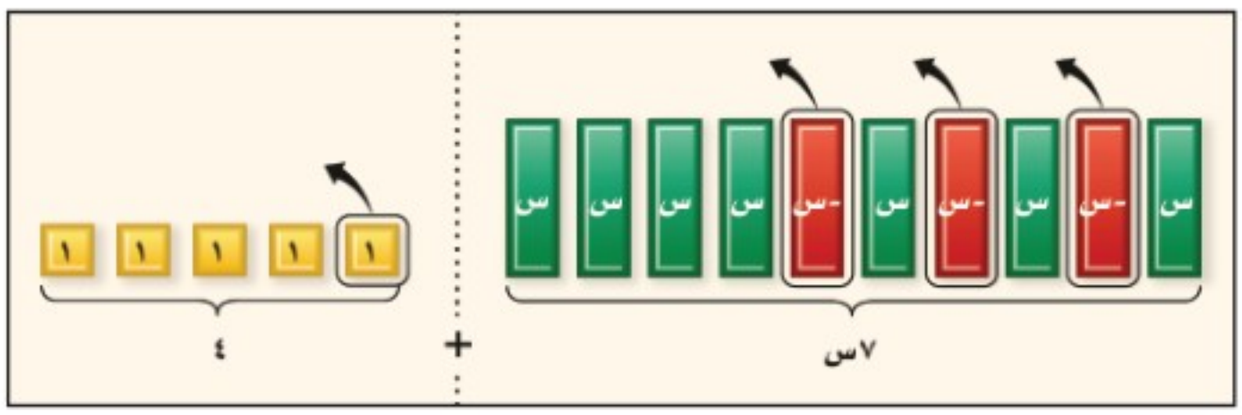
نشاط ٢ طرح كثيرات الحدود

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج
(٤س + ٥) − (−٣س + ١).

الخطوة ١: مثّل كثيرة الحدود: ٤س + ٥



الخطوة ٢: لطرح −٣س + ١ عليك حذف ٣ بطاقات (− س) الحمراء، وبطاقة ١ صفراء. يمكنك حذف بطاقة ١، وَبما أنه لا توجد بطاقات (− س). أضف ٣ أزواج صفرية من البطاقات س وَ (− س)، ثم احذف ٣ بطاقات (− س).



الخطوة ٣: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

إذن (٤س + ٥) − (−٣س + ١) = ٧س + ٤

تذكّر أنه يمكنك طرح عدد بإضافة نظيره الجمعي أو معكوسه. وبالمثل يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة معكوسها.

نشاط ٣ طرح كثيرات الحدود باستعمال النظير الجمعي

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج: (٤س + ٥) − (−٣س + ١).

الخطوة ١: لإيجاد الفرق بين ٤س +٥، −٣س+١، أضف ٤س+٥ إلى معكوس −٣س +١

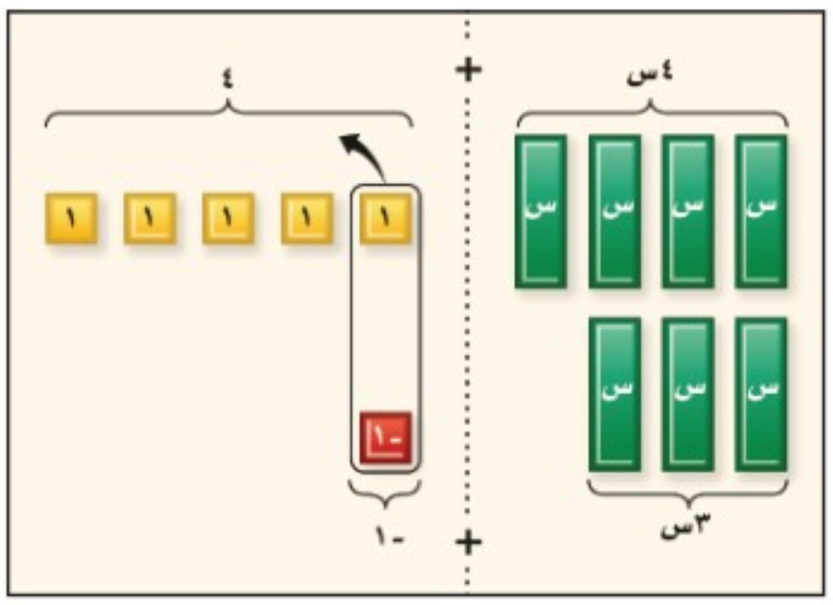
← ٤س + ٥

← معكوس −٣س+١ هو ٣س−١.

الخطوة ٢: اكتب كثيرة الحدود للبطاقات المتبقية.

إذن (٤س + ٥) − (−٣س + ١) = ٧س + ٤.

لاحظ أن الناتج هذا هو نفسه ناتج النشاط ٢.



التمثيل والتحليل

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد المجموع أو الفرق لكلٍّ مما يأتي:

١) (س^{٢} + ٥س − ٢) + (٣س^{٢} − ٢س + ٦)

٢) (٢س^{٢} + ٨س + ١) − (س^{٢} − ٤س − ٢)

٣) (−٤س^{٢} + س) − (س^{٢} + ٥س)

٤) **اكتب:** أوجد ناتج (٤س^{٢} − س + ٣) − (٢س + ١) باستعمال طريقتي النشاطين ٢ و٣. ومثّل ذلك بمخطط، ثم فسّر كيف تستعمل الأزواج الصفرية في كل حالة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٦-٤

جمع كثيرات الحدود وطرحها

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا ؟

يمكن تمثيل العدد التقريبي لحجاج الداخل ($ع_١$) وحجاج الخارج ($ع_٢$) بمئات الألوف من عام ١٤٣٥هـ إلى ١٤٣٨ هـ بالمعادلتين:

$ع_١ = ١٩٣١,٠ س^٣ - ٢٨٤١,٠ س^٢ + ١٨٠٨,٠ س + ٦,٧$

$ع_٢ = ٢٦٧٥,٠ س^٣ - ١,٠٢ س^٢ + ٩٧,٠ س + ١٧,٠٨$

حيث س عدد السنوات منذ عام ١٤٣٥ هـ .

إن إجمالي عدد الحجاج تقريبًا يمثل بـ $ع_١ + ع_٢$

جمع كثيرات الحدود: يتم جمع كثيرتي حدود بجمع الحدود المتشابهة، ويمكن جمع كثيرتي حدود باستعمال الطريقة الأفقية أو الرأسية.

فيما سبق

درستُ كتابة كثيرات الحدود بالصورة القياسية.

والآن

- أجمع كثيرات حدود.
- أطرح كثيرات حدود.

مثال ١ جمع كثيرات الحدود

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

أ) $(٢س^٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س^٢ + ٦س)$

الطريقة الأفقية

$(٢س^٢ + ٥س - ٧) + (٣ - ٤س^٢ + ٦س)$

$= [٢س^٢ + (-٤س^٢)] + [٥س + ٦س] + [-٧ + ٣]$ جمّع الحدود المتشابهة

$= -٢س^٢ + ١١س - ٤$ اجمع الحدود المتشابهة

الطريقة الرأسية

رتّب الحدود المتشابهة عموديًّا واجمع

$٢س^٢ + ٥س - ٧$

$(+) \quad -٤س^٢ + ٦س + ٣$

$-٢س^٢ + ١١س - ٤$

ب) $(٣ص + ص^٣ - ٥) + (٤ص^٢ - ٤ص + ٢ص^٣ + ٨)$

الطريقة الأفقية

$(٣ص + ص^٣ - ٥) + (٤ص^٢ - ٤ص + ٢ص^٣ + ٨)$

$= [ص^٣ + ٢ص^٣] + ٤ص^٢ + [٣ص + (-٤ص)] + [(-٥) + ٨]$ جمّع الحدود المتشابهة

$= ٣ص^٣ + ٤ص^٢ - ص + ٣$ اجمع الحدود المتشابهة

الطريقة الرأسية

أضف الحد $٠ص^٢$ للمساعدة على ترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها

رتّب الحدود المتشابهة عموديًّا واجمعها

$ص^٣ + ٠ص^٢ + ٣ص - ٥$

$(+) \quad ٢ص^٣ + ٤ص^٢ - ٤ص + ٨$

$٣ص^٣ + ٤ص^٢ - ص + ٣$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

١أ) $(٥س^{٢}- ٣س + ٤) + (٦س- ٣س^{٢}- ٣)$

١ب) $(ص^{٤}- ٣ص+ ٧)+ (٢ص^{٣}+ ٢ص-٢ص^{٤}- ١١)$

طرح كثيرات الحدود: تذكّر أنه يمكنك طرح عدد صحيح بإضافة معكوسه أو نظيره الجمعي. وبالمثل، يمكنك طرح كثيرة حدود بإضافة نظيرها الجمعي.

لإيجاد النظير الجمعي لكثيرة حدود، اكتب معكوس كل حد من حدودها.

$-(٣س^{٢} + ٢س - ٦) = \underbrace{-٣ س^{٢} - ٢س + ٦}$ نظير جمعي

إرشادات للدراسة

النظير الجمعي

عند إيجاد النظير الجمعي أو المعكوس لكثيرة حدود، اضرب كل حد فيها في العدد -١.

مثال ٢ طرح كثيرات الحدود

أوجد ناتج: $(٧ك +٤ك^{٣} -٨) - (٣ك^{٢} +٢-٩ك)$

الطريقة الأفقية

اطرح $٣ك^{٢} + ٢ -٩ك$ بإضافة نظيرها الجمعي

$(٧ك + ٤ك^{٣} - ٨) - (٣ك^{٢} + ٢ - ٩ك)$

$= (٧ك + ٤ك^{٣} - ٨) + (-٣ك^{٢} - ٢ + ٩ك)$ النظير الجمعي لـ $(٣ك^{٢}+٢-٩ك)$ هو $(-٣ك^{٢} -٢+٩ك)$

$=[٧ك + ٩ك] + ٤ك^{٣} + (-٣ك^{٢})+ [(-٨) + (-٢)]$ جمّع الحدود المتشابهة.

$= ٤ك^{٣} - ٣ك^{٢} + ١٦ك - ١٠$ اجمع الحدود المتشابهة وَرتِّب.

الطريقة الرأسية

رتِّب الحدود المتشابهة عموديًّا واطرح بإضافة النظير الجمعي.

$$\begin{array}{rl} ٤ك^{٣} + ٠ك^{٢} + ٧ك - ٨ & \\ -٣ك^{٢} - ٩ك + ٢ & (-) \\ \hline \end{array}$$

جمع النظير

$$\begin{array}{rl} ٤ك^{٣} - ٠ك^{٢} + ٧ك - ٨ & \\ -٣ك^{٢} + ٩ك - ٢ & (+) \\ \hline ٤ك^{٣} - ٣ك^{٢} + ١٦ك - ١٠ & \end{array}$$

إذن: $(٧ك + ٤ك^{٣} - ٨) - (٣ك^{٢} + ٢ - ٩ك) = ٤ك^{٣} - ٣ك^{٢} + ١٦ك - ١٠$

إرشادات للدراسة

الطريقة الرأسية

لاحظ أن كثيرتي الحدود قد كتبتا بالصورة القياسية، وأن الحدود المتشابهة تُرتَّب عموديًّا بعضها فوق بعض.

تحقق من فهمك

٢أ) $(٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦س - ٤) - (-٢س^{٣} + س^{٢} - ٢)$

٢ب) $(٨ص - ١٠ + ٥ص^{٢}) - (٧ - ص^{٣} + ١٢ص)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الربط مع الحياة

مع تطوُّر التقنيات السريعة، تشهد السوق ارتفاعًا كبيرًا في مبيعات آلات التصوير الرقمية والهواتف المحمولة.

مثال ٣ من واقع الحياة

متجر إلكترونيات: تمثِّل المعادلتان أدناه عدد الهواتف المحمولة هـ، وعدد آلات التصوير الرقمية ك التي بيعت في ش شهر لمتجر بيع إلكترونيات: هـ = ٧ش + ١٣٧، ك = ٤ش + ٧٨

أ) اكتب معادلة تمثِّل المبيعات الكلية (ن) من الهواتف وآلات التصوير شهريًّا.

اجمع كثيرتي الحدود هـ، ك.

المبيعات الكلية = مبيعات الهواتف المحمولة + مبيعات آلات التصوير الرقمية

ن = ٧ش + ١٣٧ + ٤ش + ٧٨ — عوِّض

= ١١ ش + ٢١٥ — اجمع الحدود المتشابهة.

المعادلة هي: ن = ١١ ش + ٢١٥

ب) استعمل المعادلة للتنبؤ بعدد الهواتف المحمولة وآلات التصوير الرقمية التي ستُباع في ١٠ أشهر.

ن = ١١(١٠) + ٢١٥ — عوّض عن ش بـ ١٠

= ١١٠ + ٢١٥ = ٣٢٥ — بسّط

لذا فإنه سيتم بيع ٣٢٥ هاتفًا محمولاً وآلة تصوير رقمية في ١٠ أشهر.

تحقق من فهمك

٣) استعمل المعلومات السابقة لكتابة معادلة تمثل الفرق (ف) بين مبيعات الهواتف المحمولة وآلات التصوير شهريًّا ثم استعمل المعادلة للتنبؤ بالفرق في المبيعات الشهرية في ٢٤ شهرًا.

تأكد

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

١) (٦س^{٣} − ٤) + (−٢س^{٣} + ٩)

٢) (جـ^{٣} − ٢جـ^{٢} + ٥جـ + ٦) − (جـ^{٢} + ٢جـ)

٣) (٨ص − ٤ص^{٢}) + (٣ص − ٩ص^{٢})

٤) (−٤ع^{٣} − ٢ع + ٨) − (٤ع^{٣} + ٣ع^{٢} − ٥)

٥) (−٣د^{٢} − ٨ + ٢د) + (٤د − ١٢ + د^{٢})

٦) (٣ن^{٣} − ٥ن + ن^{٢}) − (−٨ن^{٢} + ٣ن^{٣})

مثال ٣ **٧) إجازة:** يتوزَّع العدد الكلي للطلاب (ك) الذين يسافرون خلال الإجازة إلى مجموعتين: مجموعة تسافر إلى المنطقة (ف) بالطائرة، والمجموعة الأخرى تسافر إلى المنطقة (د) بالسيارة، ويمكن تمثيل العدد الكلي بالآلاف للطلاب (ك) الذين سافروا خلال الإجازة، وعدد الطلاب (ع) الذين سافروا للمنطقة (ف) بالمعادلتين: ك = ١٤ن + ٢١، ع = ٨ن + ٧، حيث (ن) عدد السنوات منذ عام ١٤٢٥ هـ.

أ) اكتب المعادلة التي تمثِّل عدد الطلاب (ل) الذين توجَّهوا إلى المنطقة د في هذه الفترة.

ب) كم طالبًا يُتوقع أن يتوجهوا إلى المنطقة د في عام ١٤٤٢ هـ؟

جـ) كم طالبًا يُتوقع أن يسافروا في عام ١٤٤٥ هـ؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كل مما يأتي:

٨) (ص + ٥) + (٢ص + ٤ص^{٢} − ٢)

٩) (٣جـ^{٣} − جـ + ١١) − (جـ^{٢} + ٢جـ + ٨)

١٠) (ع^{٢} + ع) + (ع^{٢} − ١١)

١١) (٢س − ٢ص + ١) − (٣ص + ٤س)

١٢) (٤أ − ٥ب^{٢} + ٣) + (٦ − ٢أ + ٣ب^{٢})

١٣) (س^{٢}ص − ٣س^{٢} + ص) + (٣ص − ٢س^{٢}ص)

١٤) (٦أب^{٢} + ٢أب) + (٣أ^{٢}ب − ٤أب + أب^{٢})

١٥) (جـد^{٢} + ٢جـد − ٤) + (−٦ + ٤جـد − ٢جـد^{٢})

١٦) (٣ن^{٣} + ٣ن − ١٠) − (٤ن^{٢} − ٥ن) + (٤ن^{٣} − ٣ن^{٢} − ٩ن + ٤)

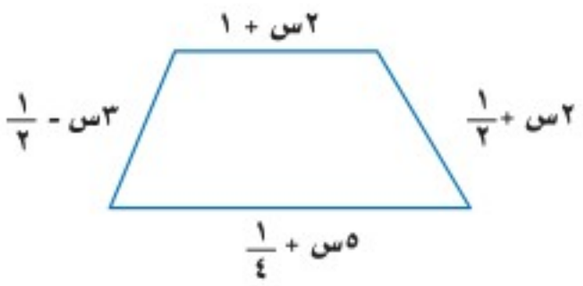
مثال ٣

١٧) **مبيعات:** يُقدّر متجر بيع إلكترونات أن تكلفة س وحدة من أجهزة التلفاز LCD بالريال تُعطى بالعبارة ٠,٤٢س^{٢} + ٢١٢٨س + ١٥٠٠، وأن الربح من بيع س تلفازًا هو ٧٥س، حيث س بين صفر وَ ٨٠٠

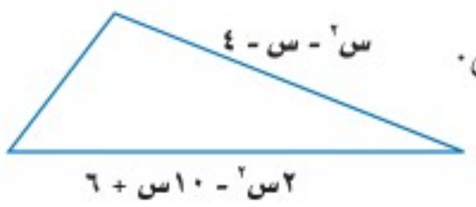
أ) اكتب كثيرة حدود تمثل سعر بيع س وحدة.

ب) ما سعر بيع ٧٥٠ تلفازًا؟

١٨) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثِّل محيط الشكل المجاور.



١٩) **هندسة:** تمثِّل العبارة ٣س^{٢} − ٧س + ٢ محيط الشكل المقابل. اكتب كثيرة حدود تمثِّل قياس الضلع الثالث.



الربط مع الحياة

معدل العمر الافتراضي لجهاز التلفاز LCD هو ٦٠٠٠٠ ساعة. مما يعني استعماله مدة ٢٠ سنة أو أكثر إذا عمل أقل من ٨ ساعات يوميًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٠) **اكتشف الخطأ:** يجد كل من ثامر وسلطان ناتج: (٢س^{٢} − س) − (٣س + ٣س^{٢} − ٢). فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

ثامر

(٢س^{٢} − س) − (٣س + ٣س^{٢} − ٢)
= (٢س^{٢} − س) + (−٣س + ٣س^{٢} − ٢)
= ٥س^{٢} − ٤س − ٢

سلطان

(٢س^{٢} − س) − (٣س + ٣س^{٢} − ٢)
= (٢س^{٢} − س) + (−٣س − ٣س^{٢} − ٢)
= − س^{٢} − ٤س − ٢

٢١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرتي حدود الفرق بينهما ٢س^{٣} − ٧س + ٨.

٢٢) **تبرير:** أوجد مثالاً مضادًّا للعبارة الآتية: «طرح كثيرات الحدود عملية إبدالية».

٢٣) **اكتب:** صف كيف تجمع كثيرتي حدود وتطرحهما باستعمال الطريقتين الرأسية والأفقية. وأي الطريقتين هي الأسهل في نظرك؟ ولماذا؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدريب على اختبار

٢٤) يمكن التعبير عن ثلاثة أعداد صحيحة متتالية بالرموز: س، س +١، س+٢. ما مجموع هذه الأعداد الثلاثة؟

أ) س(س+١)(س+٢)　　جـ) ٣س + ٣

ب) $س^{٣}$ +٣　　د) س + ٣

٢٥) **إجابة قصيرة:** ما محيط مربع طول ضلعه (٢س + ٣) وحدة؟

مراجعة تراكمية

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦ - ٣)

٢٦) ٢٥　　٢٧) $ن^{٣}$ + ٦و　　٢٨) ٢ + ٣أ$ب^{٣}$ − $أ^{٢}$ب + $٤أ^{٦}$　　٢٩) ٦ − $ك^{٤}$ + $ك^{٢}ع^{٣}$ + $٦ك^{٣}$

بسِّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦ - ١)

٣٠) $ن^{٣}$ ($ن^{٢}$) (−٢$ن^{٣}$)　　٣١) (−٨$وع^{٥}$)(٥$وع^{٤}$)　　٣٢) (٦س $ص^{٢}$)^{٢}(٢$س^{٢}ص^{٢}ع^{٢}$)^{٣}

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلًّا ممَّا يأتي:

٣٣) ل ($ل^{٥}$) ($ل^{٧}$)

٣٤) $ن^{٣}$ ($ن^{٢}$) (−٢ $ن^{٣}$)

٣٥) (٥$ت^{٥}$ $ف^{٢}$) (١٠$ت^{٣}$ $ف^{٤}$)

٣٦) (−٨$و^{٤}هـ^{٥}$) (٥و $هـ^{٤}$)

٣٧) ($٣^{٢}$)^{٣}

٣٨) ($٢^{٣}$)^{٢}

٣٩) (٢$م^{٤}$ $ك^{٣}$)^{٢} (−٣م $ك^{٢}$)^{٣}

٤٠) (٦ص ع)^{٢} (٢$ص^{٢}ع^{٢}ز^{٢}$)^{٣}

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل ٦

اختبار منتصف الفصل

الدروس من ٦-١ إلى ٦ - ٤

بسِّط كل عبارةٍ مما يأتي: (الدرس ٦-١)

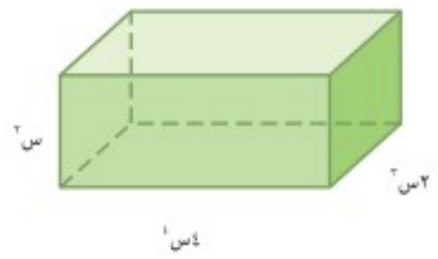
١) $(س^{٣})(٤ س^{٥})$

٢) $(م^{٢} ب^{٥})^{٣}$

٣) $[(٢س ص^{٣})^{٢}]^{٣}$

٤) $(٦أ ب^{٣} جـ^{٤})(-٣أ^{٢} ب^{٣} جـ)$

٥) **اختيار من متعدد:** عبّر عن حجم المجسّم أدناه في صورة وحيدة حدٍّ: (الدرس ٦-١)



أ) $٦ س^{٩}$ جـ) $٨ س^{٢٤}$

ب) $٨ س^{٩}$ د) $٧ س^{٢٤}$

بسِّط كل عبارةٍ مما يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا:

(الدرس ٦-٢)

٦) $\left(\frac{٢أ^{٤} ب^{٣}}{جـ^{٦}}\right)^{٣}$

٧) $\frac{٢ س ص^{٠}}{٦ س}$

٨) $\frac{م^{٧} ن^{٤} ب}{م^{٣} ن^{٣} ب}$

٩) $\frac{ب^{٤} هـ^{-٢}}{ر^{-٥}}$

١٠) **علم الفلك:** يُقَدِّر علماء الفلك رتبة عدد النجوم في الكون بـ $١٠^{٢١}$، ورتبة عدد النجوم في درب التبانة بحوالي ١٠٠ مليارٍ، فكم مرةً تساوي رتبة عدد النجوم في الكون من رتبة عدد نجوم درب التبانة؟ (الدرس ٦-٢)

حدّد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي كثيرة حدود أم لا، وإذا كانت كذلك، فصنِّفها إلى وحيدة حدٍّ، أو ثنائية حدٍّ، أو ثلاثية حدودٍ:

(الدرس ٦-٣)

١١) $٣ ص^{٢} - ٢$

١٢) $٤ ت^{٥} + ٣ ت^{٢} + ت$

١٣) $\frac{٣س}{٥ ص}$

١٤) $ب س^{-٣}$

١٥) $٣ ب^{٢}$

١٦) $٢ س^{-٣} - ٤ س + ١$

١٧) **كثافة سكانية:** الجدول أدناه يبيِّن كثافة عدد السكان في إحدى المدن. (الدرس ٦-٣)

العام	عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠م	الكثافة شخص / ميل مربع
١٩٤٠	٠	١
١٩٧٠	٣٠	١,٧
١٩٩٠	٥٠	٧,٢
٢٠٠٠	٦٠	١١,٤

أ) إذا كانت الدالة: د (س) = ٠,٠٠٥ س^{٢} - ١٢٧,٠ س + ١ تمثل الكثافة السكانية، حيث س عدد السنوات منذ عام ١٩٤٠م، فحدِّد نوع كثيرة الحدود.

ب) حدِّد درجة كثيرة الحدود.

جـ) استعمل الدالة لتوقع الكثافة السكانية لعام ٢٠٣٠م مبينًا خطوات الحل.

أوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس ٦-٤)

١٨) $(٨ ل^{٢} - ٩ ل + ٥ ل^{٣}) + (٢ ل^{٢} - ل + ٢ ل^{٣})$

١٩) $(٥س - ٣ س^{٢} + ٧ س^{٣}) - (٢ س^{٢} + ٣ س)$

٢٠) $(٧ هـ^{٤} - ٢ هـ^{٢}) - (هـ^{٣} + ٢ هـ)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٦ - ٥

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درستُ ضرب وحيدات الحد.

والآن

- أضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود.
- أحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدات حد في كثيرات حدود.

لماذا ؟

يريد نادٍ رياضي بناء قاعة خاصة بالتمارين الرياضية، على أن يزيد طولها على ثلاثة أمثال عرضها بـ ٣ أمتار. ولمعرفة مساحة أرض القاعة لتغطيتها بسجاد خاص بالتمارين الرياضية نضرب عرض القاعة في طولها؛ أي أن مساحة أرض القاعة تعطى بالعبارة ض (٣ض + ٣).

ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود : يمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

مثال ١ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود

أوجد ناتج: $-٣س^{٢}(٧س^{٢} - س + ٤)$.

الطريقة الأفقية :

$-٣س^{٢}(٧س^{٢} - س + ٤)$ العبارة الأصلية

$= -٣س^{٢}(٧س^{٢}) - (-٣س^{٢})(س) + (-٣س^{٢})(٤)$ خاصية التوزيع

$= -٢١س^{٤} - (-٣س^{٣}) + (-١٢س^{٢})$ اضرب

$= -٢١س^{٤} + ٣س^{٣} - ١٢س^{٢}$ بسّط

الطريقة الرأسية :

$٧س^{٢} - س + ٤$

$(\times)\ -٣س^{٢}$ خاصية التوزيع

$-٢١س^{٤} + ٣س^{٣} - ١٢س^{٢}$ اضرب

تحقق من فهمك

١أ) $٥أ^{٢}(-٤أ^{٢} + ٢أ - ٧)$

١ب) $-٦د^{٣}(٣د^{٤} - ٢د^{٣} - د + ٩)$

ويمكنك استعمال الطريقة نفسها أكثر من مرة لتبسيط عبارات تتكون من عدة حدود .

مثال ٢ تبسيط العبارات

بسِّط $٢ل(-٤ل^{٢} + ٥ل) - ٥(٢ل^{٢} + ٢٠)$.

$٢ل(-٤ل^{٢} + ٥ل) - ٥(٢ل^{٢} + ٢٠)$ العبارة الأصلية

$= (٢ل)(-٤ل^{٢}) + (٢ل)(٥ل) + (-٥)(٢ل^{٢}) + (-٥)(٢٠)$ خاصية التوزيع

$= -٨ل^{٣} + ١٠ل^{٢} - ١٠ل^{٢} - ١٠٠$ اضرب

$= -٨ل^{٣} + (١٠ل^{٢} - ١٠ل^{٢}) - ١٠٠$ خاصية التجميع

$= -٨ل^{٣} - ١٠٠$ اجمع الحدود المتشابهة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

٢أ) $٣(٥س^{٢}+٢س-٤)-س(٧س^{٢}+٢س-٣)$

٢ب) $١٥ن(١٠ص^{٣}ن^{٥}+٥ص^{٢}ن)-٢ص(ص ن^{٢}+٤ص^{٢})$

ويمكنك استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود عند حل مسائل من واقع الحياة .

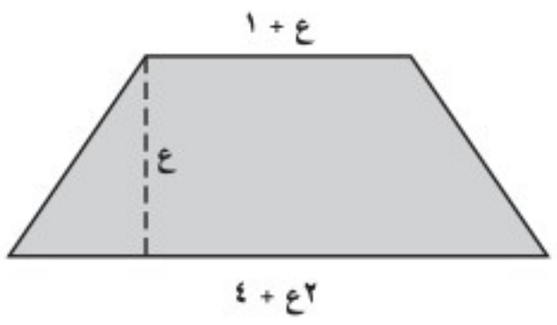
إرشادات للاختبار

الصيغ والقوانين

تزود بعض الاختبارات الوطنية والعالمية الطلاب بورقة تحتوي الصيغ والقوانين الأكثر استعمالاً. ويمكن الرجوع إليها قبل بدء حل المسألة عند عدم التأكد من الصيغة أو القانون المطلوب.

مثال ٣ من اختبار

لوحة جدارية: غُطيت لوحة جدارية على شكل شبه منحرف بورق ذهبي. فإذا كان ارتفاع اللوحة ٤٤ سم. فكم سنتمترًا مربعًا من الورق الذهبي نحتاج إليه؟ ثم مثل الإجابة على نموذج الإجابة المعطى.



اقرأ الفقرة:

يطلب السؤال إيجاد مساحة شبه منحرف طولا قاعدتيه ع + ١، ٢ع + ٤ وارتفاعه ع.

حل الفقرة:

اكتب معادلة تمثِّل مساحة شبه المنحرف.

لتكن $ق_{١} = ع + ١$، $ق_{٢} = ٢ع + ٤$، ع = ارتفاع شبه المنحرف.

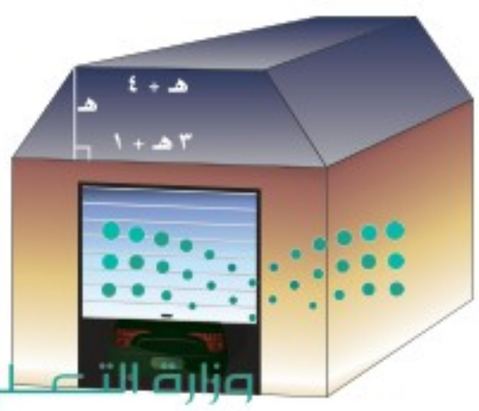
$م = \frac{١}{٢} ع (ق_{١} + ق_{٢})$	مساحة شبه المنحرف
$= \frac{١}{٢} ع [(ع + ١) + (٢ع + ٤)]$	$ق_{١} = ع + ١$ ، $ق_{٢} = ٢ع + ٤$
$= \frac{١}{٢} ع (٣ع + ٥)$	اجمع ثم بسّط
$= \frac{٣}{٢} ع^{٢} + \frac{٥}{٢} ع$	خاصية التوزيع
$= \frac{٣}{٢} (٤٤)^{٢} + \frac{٥}{٢} (٤٤)$	ع = ٤٤
$= ٣٠١٤$	بسّط

إذن نحتاج إلى ٣٠١٤ سم^{٢} من الورق الذهبي.

	٤	١	٠	٣
٠	٠	٠	٠	٠
١	١	١	١	١
٢	٢	٢	٢	٢
٣	●	٣	٣	●
٤	٤	٤	٤	٤
٥	٥	٥	٥	٥
٦	٦	٦	٦	٦
٧	٧	٧	٧	٧
٨	٨	٨	٨	٨
٩	٩	٩	٩	٩

تحقق من فهمك

٣) مرآب: يمثل الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب المجاور شكل شبه منحرف. إذا كان ارتفاع شبه المنحرف ١,٧٥ متر، فأوجد مساحة الجزء العلوي من الواجهة الأمامية للمرآب.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

حل معادلات تتضمن كثيرة حدود : تستطيع استعمال خاصية التوزيع لحل معادلات تتضمن حاصل ضرب وحيدة حد بكثيرة حدود.

إرشادات للدراسة

جمع الحدود المتشابهة

إذا أردت تبسيط عبارة تحوي الكثير من الحدود، فقد يساعدك على ذلك وضع دوائر حول أحد مجموعات الحدود المتشابهة ومستطيلات حول عناصر مجموعة أخرى، ومثلثات حول عناصر مجموعة ثالثة، وهكذا.

مثال ٤ **معادلات تتضمن كثيرات حدود في طرفيها**

حل المعادلة: ٢أ(٥أ − ٢) + ٣أ(٢أ + ٦) + ٨ = أ(٤أ + ١) + ٢أ(٦أ − ٤) + ٥٠

٢أ(٥أ − ٢) + ٣أ(٢أ + ٦) + ٨ = أ(٤أ + ١) + ٢أ(٦أ − ٤) + ٥٠	المعادلة الأصلية
١٠أ^{٢} − ٤أ + ٦أ^{٢} + ١٨أ + ٨ = ٤أ^{٢} + أ + ١٢أ^{٢} − ٨أ + ٥٠	خاصية التوزيع
١٦أ^{٢} + ١٤أ + ٨ = ١٦أ^{٢} − ٧أ + ٥٠	اجمع الحدود المتشابهة
١٤أ + ٨ = −٧أ + ٥٠	اطرح ١٦ أ^{٢} من كلا الطرفين
٢١أ + ٨ = ٥٠	أضف ٧أ إلى كلا الطرفين
٢١أ = ٤٢	اطرح ٨ من كلا الطرفين
أ = ٢	اقسم كلا الطرفين على ٢١

تحقق :

٢أ(٥أ − ٢) + ٣أ(٢أ + ٦) + ٨ = أ(٤أ + ١) + ٢أ(٦أ − ٤) + ٥٠

٢(٢)[٥(٢) − ٢] + ٣(٢)[٢(٢) + ٦] + ٨ ≟ ٢[٤(٢) + ١] + ٢(٢)[٦(٢) − ٤] + ٥٠ — بسّط

٤(٨) + ٦(١٠) + ٨ ≟ ٢(٩) + ٤(٨) + ٥٠ — اضرب

٣٢ + ٦٠ + ٨ ≟ ١٨ + ٣٢ + ٥٠ — اجمع

١٠٠ = ١٠٠ ✓

تحقق من فهمك

٤أ) ٢س(س + ٤) + ٧ = (س + ٨) + ٢س(س + ١) + ١٢

٤ب) د(د + ٣) − د(د − ٤) = ٩د − ١٦

تأكد

مثال ١ أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١) ٥ن(−٣ن^{٢} + ٢ن − ٤)

٢) ٦جـ^{٢}(٣جـ^{٣} + ٤جـ^{٢} + ١٠جـ − ١)

٣) −٣ل^{٤}ر^{٣}(٢ل^{٢}ر^{٤} − ٦ل^{٦}ر^{٣} − ٥)

٤) ٢أب(٧أ^{٤}ب^{٢} + أ^{٥}ب − ٢أ)

مثال ٢ بسِّط كل عبارة فيما يأتي :

٥) ن(٤ن^{٢} + ١٥ن + ٤) − ٤(٣ن − ١)

٦) س(٣س^{٢} + ٤) + ٢(٧س − ٣)

٧) −٢د(د^{٣}جـ^{٢} − ٤د جـ^{٢} + ٢د^{٢}جـ) + جـ^{٢}(د جـ^{٢} − ٣د^{٤})

مثال ٣ **٨) تلفاز:** اشترى أحمد تلفازًا جديدًا. ارتفاع شاشته يساوي نصف عرضها، بالإضافة إلى ٥ بوصات، وعرضها ٣٠ بوصة. أوجد ارتفاع الشاشة بالبوصات.

مثال ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

٩) −٦(١١ − ٢جـ) = ٧(−٢ − ٢جـ)

١٠) ن(٢ن + ٣) + ٢٠ = ٢ن(ن + ٣)

١١) أ(أ + ٣) + أ(أ − ٦) + ٣٥ = أ(أ − ٥) + أ(أ + ٧)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

١٢) ب(ب^{٢} − ١٢ب + ١)

١٣) ٢جـ^{٢}(٥جـ^{٣} − ١٥جـ^{٢} + ٢جـ + ٢)

١٤) ٢ب ر^{٢}(٢ب ر + ٥ب^{٢}ر − ١٥ب)

١٥) ٤ن^{٣}ل(٢ن^{٢}ل^{٢} − ١٠ن ل^{٤} + ٢)

مثال ٢ بسِّط كل عبارة فيما يأتي:

١٦) −٣(٥س^{٢} + ٢س + ٩) + س(٢س − ٣)

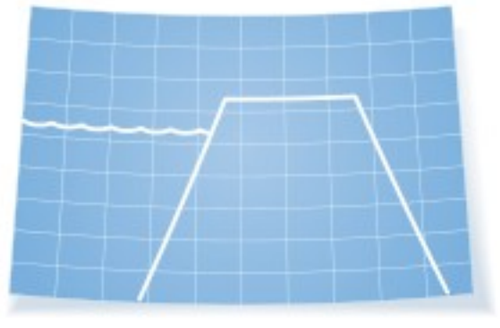
١٧) أ(−٨أ^{٢} + ٢أ + ٤) + ٣(٦أ^{٢} − ٤)

١٨) −٤د(٥د^{٢} − ١٢) + ٧(د + ٥)

١٩) −٩جـ(−٢جـ + جـ^{٢}) + ٣(جـ^{٢} + ٤)

٢٠) ٤ن(٢ن^{٣}ب^{٢} − ٣ن ب^{٢} + ٥ن) + ٤ب(٦ن^{٢}ب − ٢ن ب^{٢} + ٣ب)

مثال ٣



٢١) سدود: واجهة سد على شكل شبه منحرف. طول قاعدتها السفلية مِثْلا ارتفاعها. وقاعدتها العليا أقل من $\frac{١}{٥}$ ارتفاعها بـِ ١٠ أمتار.

أ) اكتب عبارة لإيجاد مساحة هذه الواجهة.

ب) إذا كان ارتفاع السد ٦٠ مترًا، فأوجد هذه المساحة.

مثال ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

٢٢) ٧(ن^{٢} + ٥ن − ٩) + ن = ن(٧ن − ٢) + ١٣

٢٣) ٥(٤ع + ٦) − ٢(ع − ٤) = ٧ع(ع + ٤) − ع(٧ع − ٢) − ٤٨

٢٤) ٩جـ(جـ − ١١) + ١٠(٥جـ − ٣) = ٣جـ(جـ + ٥) + جـ(٦جـ − ٣) − ٣٠

٢٥) ٢ن(٥ن − ٢) − ١٠(ن^{٢} − ٣ن + ٦) = −٨ن(ن + ٤) + ٤(٢ن^{٢} − ٧ن)

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٢٦) $\frac{٢}{٣}$ن ب^{٢}(٣٠ب^{٢} + ٩ن^{٢}ب − ١٢)

٢٧) $\frac{٣}{٥}$ر^{٢}ل(١٠ر^{٣} + ٥رل^{٣} + ١٥ل^{٢})

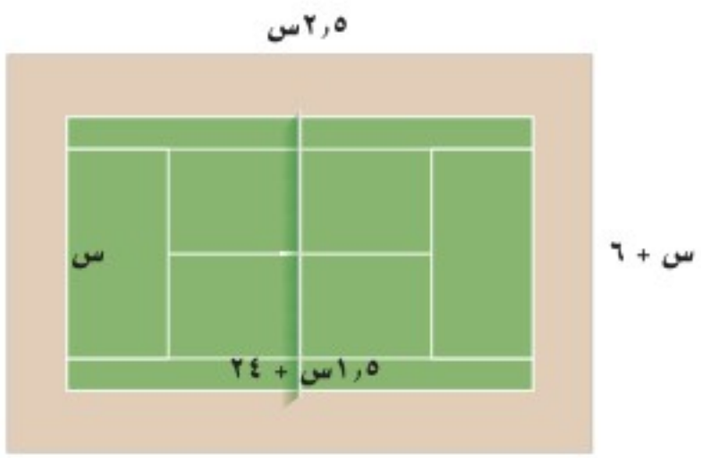
٢٨) − س^{٢}ع(٢ع^{٢} + ٤س ع^{٣}) + س ع^{٢}(س ع + ٥س^{٣}ع) + س^{٢}ع^{٣}(٣س^{٢}ع + ٤س ع)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الربط مع الحياة

يستخدم لاعبو التنس الأرضي مضارب لدفع أو صد كرة صغيرة مجوفة، فوق شبكة عرضية تنصَّف ملعبًا مستطيلًا. وتعتمد المهارة في هذه الرياضة، على التناسق بين حركات اليدين والعينين، وذكاء اللاعب في توقُّع اتجاه الكرة.

٢٩) **تنس أرضي:** يبني نادي التنس ملعبًا جديدًا يحيط به ممر منتظم، كما في الشكل المجاور.



أ) اكتب عبارة تمثِّل مساحة ملعب التنس.

ب) اكتب عبارة تمثِّل مساحة الممر.

٣٠) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

أ) جدوليًّا: اكتب ثلاث وحيدات حد مختلفة الدرجات وثلاث كثيرات حدود مختلفة الدرجات، ثم حدد درجة كل وحيدة حد وكثيرة حدود، واضرب وحيدات الحد في كثيرات الحدود، وحدِّد درجة ناتج الضرب. وأخيرًا سجّل نتائجك في الجدول على النحو الآتي:

وحيدة الحد	الدرجة	كثيرة الحدود	الدرجة	ناتج ضرب وحيدة الحد في كثيرة الحدود	الدرجة

ب) لفظيًّا: خمِّن درجة ناتج ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود. ما درجة ناتج ضرب وحيدة حد من الدرجة أ، في كثيرة حدود من الدرجة ب؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٣١) **تحدٍّ:** أوجد قيمة ب التي تجعل ٣س^{ب}(٤س$^{٢ب+٣}$ + ٢س$^{٣ب-٢}$) = ١٢س^{١٢} + ٦س^{١٠}

٣٢) **تبرير:** هل توجد قيمة للمتغير س تجعل العبارة: (س + ٢)^{٢} = س^{٢} + ٢^{٢} صحيحة؟ وإذا كان كذلك، فأوجد هذه القيمة. وفسِّر إجابتك.

٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب وحيدة حد وكثيرة حدود باستعمال المتغير نفسه، وأوجد ناتج ضربهما.

٣٤) **اكتب:** صف خطوات ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

تدريب على اختبار

٣٥) يبيع محل ملابس م بنطالًا، ن قميصًا أسبوعيًّا، فإذا كان ثمن القميص ٨٠ ريالًا، والبنطال ١٢٠ ريالًا. فأي العبارات الآتية تمثِّل المبلغ الذي يحصل عليه المحل ثمنًا لذلك؟

أ) ٨٠م + ١٢٠ن

ب) ١٢٠م + ٨٠ن

جـ) ٢٠٠(م + ن)

د) ٩٦٠٠م ن

٣٦) إذا كانت أ = ٥س + ٧ص، ب = ٢ص − ٣س، فأوجد أ + ب

أ) ٢س − ٩ص

ب) ٣ص + ٤س

جـ) ٢س + ٩ص

د) ٢س − ٥ص

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦- ٤)

٣٧) $(٣ع^{٢} + ٢ع - ١) + (ع^{٢} - ٦)$

٣٨) $(أ^{٣} - ٣أ^{٢} + ٤) - (٤أ^{٢} + ٧)$

٣٩) $(٨جـ^{٣} - ٣جـ^{٢} + جـ - ٢) - (٣جـ^{٣} + ٩)$

أوجد درجة كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٦- ٣)

٤٠) ١٢ص

٤١) -١٠

٤٢) $-٣ب^{٤}ر^{٥}ن^{٢}$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (الدرس ٦- ١)

٤٣) $-ص^{٤}(-٢ص^{٣})$

٤٤) $٢م(-٤م^{٤}) - ٣(-٥م^{٣})$

٤٥) $٤ب^{٢}(-٢ب^{٣}) + ٢ب^{٤}(٥ب^{٦})$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

بسّط كلًّا مما يأتي:

٤٦) ب (ب^{٢}) (ب^{٣})

٤٧) ٢ص (٣ص^{٢})

٤٨) $-ص^{٤}(-٢ص^{٣})$

٤٩) $-٣ع^{٣}(-٥ع^{٤} + ٢ع)$

٥٠) $٢م(-٤م^{٤}) - ٣(-٥م^{٣})$

٥١) $٤ب^{٢}(-٢ب^{٣}) + ٢ب^{٤}(٥ب^{٦})$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

ضرب كثيرات الحدود

رابط الدرس الرقمي

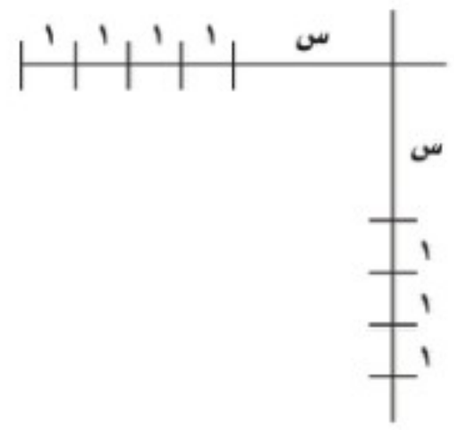
www.ien.edu.sa

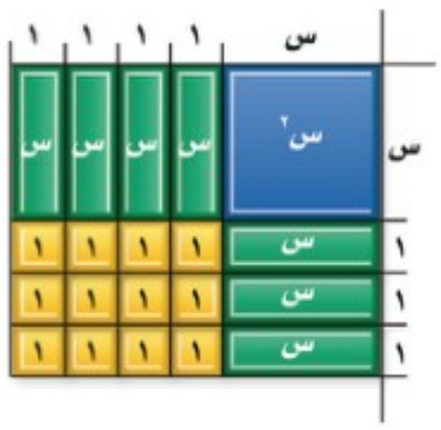
يمكنك استعمال بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب ثنائيتي حد.

نشاط ١ ضرب ثنائيتي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (س + ٣) (س + ٤).

حدِّد بعدي المستطيل: س + ٣، س + ٤ كما في الشكل الأول أدناه، ثم استعمل بطاقات الجبر، لإكمال المستطيل كما في الشكل الثاني.





يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة $س^{٢}$، ٧ بطاقات س، ١٢ بطاقة ١

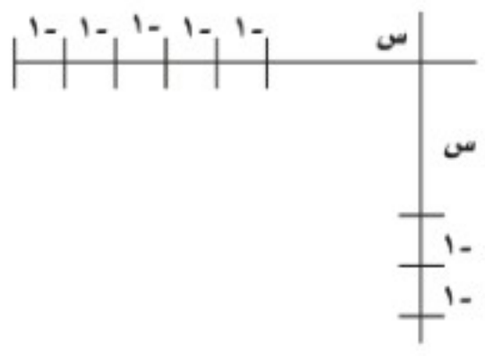
وعليه تكون مساحة المستطيل تساوي $س^{٢} + ٧س + ١٢$

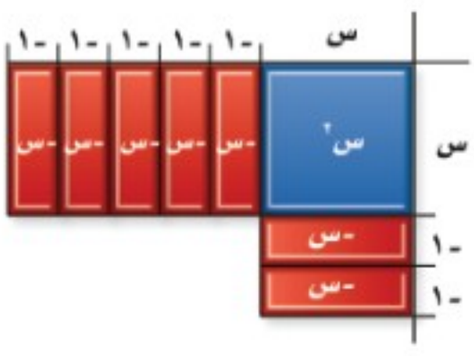
إذن $(س + ٣)(س + ٤) = س^{٢} + ٧س + ١٢$

نشاط ٢ ضرب ثنائيتي حد

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (س – ٢) (س – ٥).

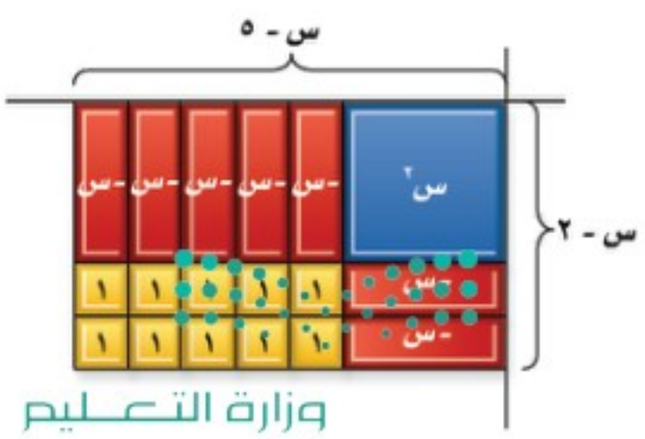
الخطوة ١: حدِّد بعدي المستطيل س – ٢، س – ٥
ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو مُوضَّح في الشكل المقابل.





الخطوة ٢: حدِّد هل ستستعمل ١٠ بطاقات ١، أو ١٠ بطاقات –١ لتكملة المستطيل.
بما أن مساحة كل بطاقة ١ هو ناتج ضرب –١ في –١، لذا املأ الفراغ بـ ١٠ بطاقات ١ لتكملة المستطيل.

يحتوي المستطيل على بطاقة واحدة $س^{٢}$، ٧ بطاقات –س، ١٠ بطاقات ١
فتكون مساحة المستطيل $س^{٢} - ٧س + ١٠$.
لذا فإن $(س - ٢)(س - ٥) = س^{٢} - ٧س + ١٠$

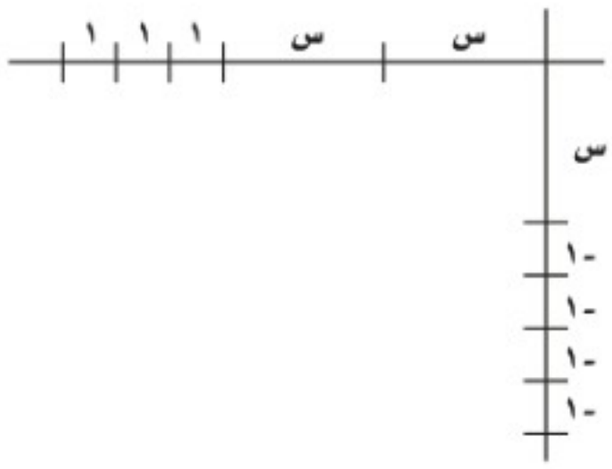


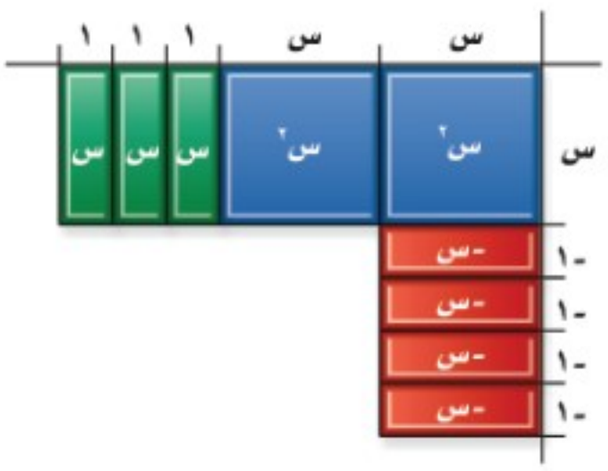
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

نشاط ٣ ضرب ثنائيتي حد

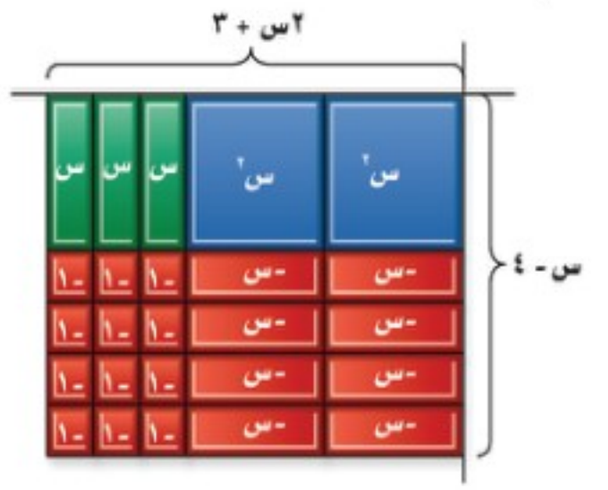
استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج (س – ٤) (٢س + ٣).

الخطوة ١ : حدِّد بُعدي المستطيل س – ٤، ٢س + ٣. ثم استعمل بطاقات الجبر لتبدأ بتكوين المستطيل كما هو موضّح في الشكل المجاور.

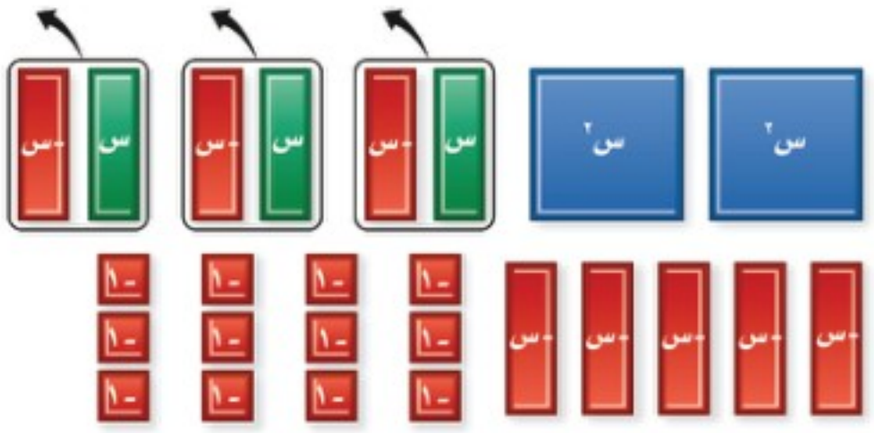




الخطوة ٢ : حدّد أي بطاقات الجبر س أم – س ستستعمل. وأي البطاقات ١ أم –١ ستستعمل لتكملة المستطيل. البطاقة – س هي حاصل ضرب س في –١. والبطاقة –١ هي حاصل ضرب ١في –١. استعمل للمستطيل ثماني بطاقات – س، وثلاث بطاقات س و١٢ بطاقة –١.



الخطوة ٣ : أعد ترتيب البطاقات لتبسيط كثيرة الحدود التي كونتها، ولاحظ أن ٣ أزواج صفرية تشكَّلت من ٣ بطاقات س، و٣ بطاقات – س. وَ يوجد بطاقتان س^{٢}، و٥ بطاقات –س، و ١٢ بطاقة –١، إذن
(س – ٤) (٢س + ٣)= ٢س^{٢}– ٥س – ١٢.



التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لإيجاد ناتج ضرب كلٍّ مما يأتي:

١) (س + ١) (س + ٤)　　٢) (س –٣) (س – ٢)　　٣) (س + ٥) (س – ١)

٤) (س + ٢) (٢س + ٣)　　٥) (س –١) (٢س – ١)　　٦) (س + ٤) (٢س – ٥)

٧) هل العبارة (س + ٣) (س+ ٥) = س^{٢}+ ١٥ صواب أم خطأ؟ تحقَّق من إجابتك باستعمال بطاقات الجبر.

٨) **اكتب:** يبيِّن الشكل المجاور تمثيلاً لِـ (س + ٤) (س + ٥) مقسمًا إلى ٤ أجزاء. فسِّر كيف يظهر هذا التمثيل استعمال خاصية التوزيع لإيجاد ناتج الضرب.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٦-٦

ضرب كثيرات الحدود

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درستُ ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود.

والآن

- أضرب كثيرات الحدود باستعمال خاصية التوزيع.
- أضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

المفردات

طريقة التوزيع بالترتيب

العبارة التربيعية

لماذا ؟

لخياطة ثوب نستعمل قطعة من القماش مستطيلة الشكل. ويُحدّد بُعداها بناءً على طول صاحب الثوب وعرضه.

فإذا كان طول قطعة القماش المراد تفصيلها كثوب لأيمن يساوي طول أيمن ع زائد ١٨٠ سم، أو ع + ١٨٠

وعرض القطعة يساوي نصف طول أيمن مضافًا إليه ٢٧ سم، أو $\frac{١}{٢}$ع + ٢٧. ولإيجاد المساحة التقريبية لقطعة القماش، فإنك تحتاج لإيجاد ناتج (ع + ١٨٠) ($\frac{١}{٢}$ع + ٢٧).

ضرب ثنائيتي حد: تستعمل خاصية التوزيع لضرب ثنائيتي حد مثل ع + ١٨٠، $\frac{١}{٢}$ع + ٢٧. ويمكن ضرب ثنائيتي الحد أفقيًّا أو رأسيًّا.

مثال ١ خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

أ) (٢س + ٣) (س + ٥)

الطريقة الرأسية

اضرب في س	اضرب في ٥	اجمع الحدود المتشابهة
٢س + ٣	٢س + ٣	٢س + ٣
(×) س + ٥	(×) س + ٥	(×) س + ٥
٢س^٢ + ٣س	٢س^٢ + ٣س	
	١٠س + ١٥	٢س^٢ + ١٣س + ١٥

س(٢س + ٣) = ٢س^٢ + ٣س ٥(٢س + ٣) = ١٠س + ١٥

الطريقة الأفقية:

(٢س + ٣) (س + ٥) = ٢س(س + ٥) + ٣(س + ٥) اكتبها كمجموع ناتجي ضرب

= ٢س^٢ + ١٠س + ٣س + ١٥ خاصية التوزيع

= ٢س^٢ + ١٣س + ١٥ اجمع الحدود المتشابهة

ب) (س − ٢) (٣س + ٤)

الطريقة الرأسية:

اضرب في ٣س	اضرب في ٤	اجمع الحدود المتشابهة
س − ٢	س − ٢	س − ٢
(×) ٣س + ٤	(×) ٣س + ٤	(×) ٣س + ٤
٣س^٢ − ٦س	٣س^٢ − ٦س	
	٤س − ٨	٣س^٢ − ٢س − ٨

٣س(س − ٢) = ٣س^٢ − ٦س ٤(س − ٢) = ٤س − ٨

وزارة التعليم
Ministry of Education
1443 - 2021

الطريقة الأفقية:

(س − ٢)(٣س + ٤) = س(٣س + ٤) − ٢(٣س + ٤) — اكتبها كفرق بين حاصلي ضرب

$= ٣س^{٢} + ٤س - ٦س - ٨$ — خاصية التوزيع

$= ٣س^{٢} - ٢س - ٨$ — اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١أ) (٣م + ٤)(م + ٥)

١ب) (٥ص − ٢)(ص + ٨)

وتُسمى الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع في ضرب ثنائيتي حد **بطريقة التوزيع بالترتيب**.

قراءة الرياضيات

كثيرات الحدود كعوامل:

تُقرأ العبارة (س+ ٤) (س−٢) على الصورة س زائد ٤ مضروبًا في س ناقص ٢

مفهوم أساسي — **طريقة التوزيع بالترتيب**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي لضرب ثنائيتي حد، أوجد ناتج جمع كل من: ضرب الحدين الأولين، وضرب الحدين في الطرفين، وضرب الحدين الأوسطين، وضرب الحدين الأخيرين بالترتيب.

مثال

(س + ٤)(س − ٢) = (س)(س) + (س)(−٢) + (٤)(س) + (٤)(−٢)

(س + ٤)(س − ٢) = س² − ٢س + ٤س − ٨

(س + ٤)(س − ٢) = س² + ٢س − ٨

(أ: ناتج ضرب الحدين الأولين، خ: ناتج ضرب الحدين الأخيرين، و: ناتج ضرب الحدين الأوسطين، ط: ناتج ضرب الحدين في الطرفين)

مثال ٢ — **طريقة التوزيع بالترتيب**

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

أ) (٢ص − ٧)(٣ص + ٥)

(٢ص − ٧)(٣ص + ٥) = (٢ص)(٣ص) + (٢ص)(٥) + (−٧)(٣ص) + (−٧)(٥) — طريقة التوزيع بالترتيب

$= ٦ص^{٢} + ١٠ص - ٢١ص - ٣٥$ — اضرب

$= ٦ص^{٢} - ١١ص - ٣٥$ — اجمع الحدود المتشابهة

ب) (٤أ − ٥)(٢أ − ٩)

(٤أ − ٥)(٢أ − ٩)

= (٤أ)(٢أ) + (٤أ)(−٩) + (−٥)(٢أ) + (−٥)(−٩) — طريقة التوزيع بالترتيب

$= ٨أ^{٢} - ٣٦أ - ١٠أ + ٤٥$ — اضرب

$= ٨أ^{٢} - ٤٦أ + ٤٥$ — اجمع الحدود المتشابهة

تحقق من فهمك

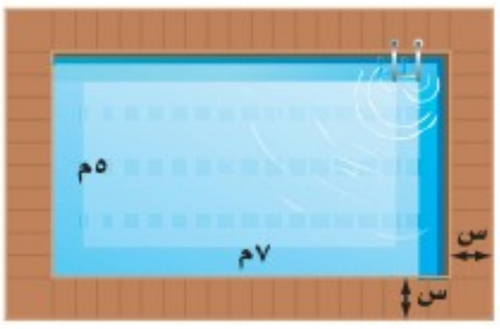
٢أ) (٤ب − ٥)(٣ب + ٢)

٢ب) (٢ص − ٥)(ص − ٦)

لاحظ أنه عند ضرب عبارتين خطيتين، تكون النتيجة عبارة تربيعية. **العبارة التربيعية** هي عبارة ذات متغير واحد من الدرجة الثانية. ونتيجة ضرب ثلاث عبارات خطية، هي عبارة من الدرجة الثالثة. ويمكنك استعمال طريقة التوزيع بالترتيب لإيجاد عبارة تمثل مساحة مستطيل أُعطي بعداه على صورة ثنائيتي حد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٣ من واقع الحياة — التوزيع بالترتيب



بركة سباحة: يحيط ممر ببركة سباحة مستطيلة الشكل. إذا كان عرض الممر هو س متر. فاكتب عبارة تمثل مساحة سطح البركة والممر معًا.

افهم: المطلوب كتابة عبارة لمساحة سطح البركة والممر حولها.

خطّط: استعمل صيغة مساحة المستطيل بعد تحديد طول البركة وعرضها بالإضافة إلى عرض الممر.

حل: بما أن الممر منتظم من جميع جهات البركة، فإن طول المستطيل الممثل للبركة والممر يزيد على طول البركة بمقدار ٢س، وكذلك العرض؛ لذا يمكن تمثيل الطول بـِ ٢س+ ٧ والعرض بـِ ٢س+ ٥

المساحة = الطول × العرض — مساحة المستطيل

= (٢س+ ٧) (٢س+ ٥) — بالتعويض

= ٢س(٢س)+ ٢س(٥)+ (٧) (٢س)+ (٧) (٥) — طريقة التوزيع بالترتيب

= ٤س^{٢}+ ١٠س+ ١٤س+ ٣٥ — اضرب

= ٤س^{٢}+ ٢٤س+ ٣٥ — اجمع الحدود المتشابهة

لذا تكون المساحة الكلية للممر والبركة معًا هي ٤س^{٢}+ ٢٤س+ ٣٥

تحقق: اختر قيمة لِـ س وعوّضها في العبارتين (٢س+ ٧) (٢س+ ٥)، ٤س^{٢}+ ٢٤س + ٣٥ ستجد أن النتيجة هي نفسها لكلتا العبارتين.

تحقق من فهمك

٣) إذا كان طول البركة ٩ م وعرضها ٧ م. فأوجد مساحة سطح البركة والممر معًا.

ضرب كثيرات الحدود: يمكنك استعمال خاصية التوزيع أيضًا لإيجاد ناتج ضرب كثيرتي حدود.

الربط مع الحياة

تعتمد تكلفة بركة السباحة على عدة عوامل. منها: كون البركة فوق مستوى سطح الأرض، أو دون مستوى سطحها، ونوع المادة المستعملة في تبليطها.

مثال ٤ — خاصية التوزيع

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

أ) (٦س+ ٥) (٢س^{٢}− ٣س− ٥)

(٦س + ٥) (٢س^{٢} − ٣س − ٥)

= ٦س(٢س^{٢} − ٣س − ٥) + ٥(٢س^{٢} − ٣س − ٥) — خاصية التوزيع

= ١٢س^{٣} − ١٨س^{٢} − ٣٠س + ١٠س^{٢} − ١٥س − ٢٥ — اضرب.

= ١٢س^{٣} − ٨س^{٢} − ٤٥س − ٢٥ — اجمع الحدود المتشابهة

ب) (٢ص^{٢} + ٣ص − ١)(٣ص^{٢} − ٥ص + ٢)

(٢ص^{٢} + ٣ص − ١)(٣ص^{٢} − ٥ص + ٢)

= ٢ص^{٢}(٣ص^{٢}−٥ص+٢) +٣ص(٣ص^{٢}−٥ص + ٢) −١(٣ص^{٢}− ٥ص + ٢) — خاصية التوزيع

= ٦ص^{٤} − ١٠ص^{٣} + ٤ص^{٢} + ٩ص^{٣} − ١٥ص^{٢} + ٦ص − ٣ص^{٢} + ٥ص − ٢ — اضرب

= ٦ص^{٤} − ص^{٣} − ١٤ص^{٢} + ١١ص − ٢ — اجمع الحدود المتشابهة

إرشادات للدراسة

ضرب كثيرات الحدود

عند ضرب كثيرة حدود تحوي م حدًّا في أخرى تحوي ن حدًّا، سيكون ناتج الضرب قبل التبسيط كثيرة حدود تحوي م × ن حدًّا، وفي المثال (٤أ) ناتج الضرب يحوي ٢×٣= ٦ حدود قبل التبسيط.

تحقق من فهمك

٤أ) (٣س − ٥)(٢س^{٢} + ٧س − ٨)

٤ب) (م^{٢} + ٢م − ٣)(٤م^{٢} − ٧م + ٥)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

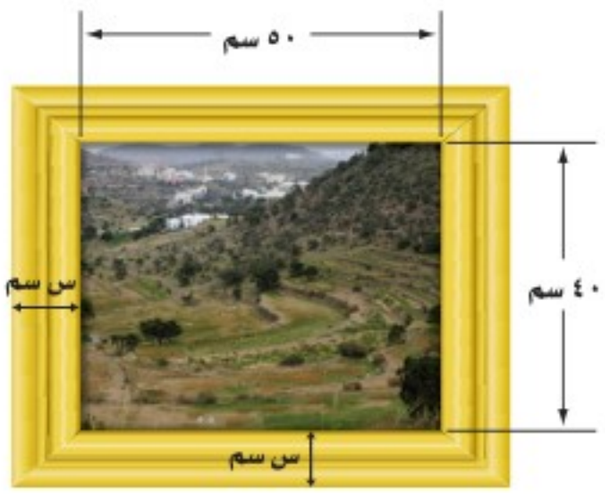
المثالان ١ ، ٢ أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١) (س + ٥)(س + ٢)　　٢) (ص − ٢)(ص + ٤)　　٣) (ب − ٧)(ب + ٣)

٤) (٤ن + ٣)(ن + ٩)　　٥) (٨هـ − ١)(٢هـ − ٣)　　٦) (٢أ + ٩)(٥أ − ٦)

مثال ٣

٧) **إطار صورة:** صمّم خالد إطارًا لصورة كما في الشكل المجاور. فإذا كان الإطار منتظمًا من جميع جهاته، فاكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للصورة والإطار معًا.



مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

٨) (٤ص^{٢} − ٣)(٤ص^{٢} + ٧ص + ٢)

٩) (س^{٢} − ٤س + ٥)(٥س^{٢} + ٣س − ٤)

تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

١٠) (٥ص − ٤)(٣ص − ١)　　١١) (٦د − ٥)(٤د − ٧)　　١٢) (٣م + ٥)(٢م + ٣)

١٣) (١٢ن − ٥)(١٢ن + ٥)　　١٤) (٥ر + ٧)(٥ر − ٧)　　١٥) (٨ل + ٤س)(٥ل − ٦س)

مثال ٣

١٦) **حديقة:** يحيط ممر عرضه س بحديقة مستطيلة الشكل، طولها ٨ أمتار، وعرضها ٦ أمتار اكتب عبارة تمثل المساحة الكلية للحديقة والممر.

مثال ٤ أوجد ناتج الضرب في كل مما يأتي:

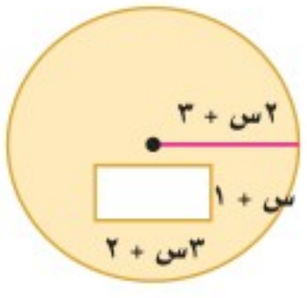
١٧) (٢ص − ١١)(ص^{٢} − ٣ص + ٢)　　١٨) (٤أ + ٧)(٩أ^{٢} + ٢أ − ٧)

١٩) (س^{٢} + ٥س − ١)(٥س^{٢} − ٦س + ١)　　٢٠) (٦ع^{٢} − ٥ع − ٢)(٣ع^{٣} − ٢ع − ٤)

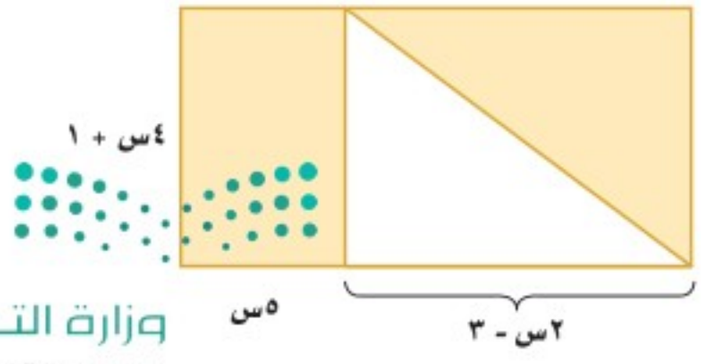
٢١) بسِّط العبارة: (م + ٢)[(م^{٢} + ٣م − ٦) + (م^{٢} − ٢م + ٤)]

هندسة: اكتب عبارة تمثل مساحة كل منطقة مظللة مما يأتي:

٢٢)



٢٣)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٢٤) **كرة طائرة:** تمثل العبارتان: (٧ص− ٥) متر، (٨ص+ ٢) متر بعدي ملعب كرة طائرة.

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة الملعب.

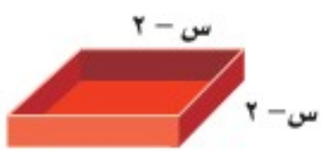
ب) إذا كان طول ملعب كرة طائرة ١٨ م، فأوجد مساحته.

الربط مع الحياة

فاز المنتخب السعودي العسكري ببطولة العالم العسكرية في كرة الطائرة التي استضافتها ألمانيا في عام ٢٠٠٨م.

٢٥) **هندسة:** اكتب عبارة تمثل مساحة مثلث طول قاعدته ٢س+ ٣، وارتفاعه ٣س− ١

٢٦) **قوالب:** تسمح القوالب المختلفة بصنع ألواح شوكولاتة مربعة أو مستطيلة الشكل كما هو مبين جانبًا.



أ) ما قيم س الممكنة؟ فسِّر إجابتك.

ب) أيّ الشكلين مساحته أكبر؟

جـ) ما الفرق بين مساحتي القالبين؟

٢٧) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال قاعدة مربع مجموع حدين.

أ) جدوليًا: انقل الجدول الآتي وأكمله.

العبارة	(العبارة)^{٢}
س + ٥	
٣ص + ١	
ع + ك	

ب) لفظيًا: اكتب جملة توضح كيفية الحصول على مربع مجموع حدين.

جـ) رمزيًا: اكتب عبارة تمثل مربع مجموع الحدين أ + ب.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٨) **تبرير:** وضِّح إذا كانت العبارة "*يمكن استعمال التوزيع بالترتيب لضرب ثنائية حد في ثلاثية حدود*" صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا، وَفسّر إجابتك.

٢٩) **تحدَّ:** أوجد ناتج : $(س^{م} + س^{ن})(س^{م-١} - س^{١-ن} + س^{ن})$.

٣٠) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائية وثلاثية حدود تتضمن كل منهما متغيرًا واحدًا، ثم أوجد ناتج ضربهما.

٣١) **اكتب:** لخِّص الطرق التي يمكن استعمالها لضرب كثيرات الحدود.

تدريب على اختبار

٣٢) ما ناتج ضرب العبارتين: ٢س− ٥، ٣س+ ٤؟

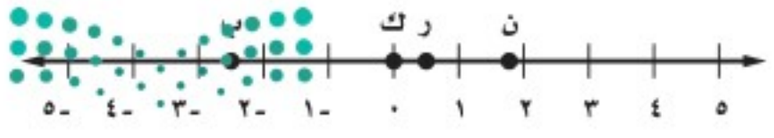
أ) ٥س − ١

ب) ٦س^{٢} − ٧س − ٢٠

جـ) ٦س^{٢} − ٢٠

د) ٦س^{٢} + ٧س − ٢٠

٣٣) **إجابة قصيرة:** أي نقطة على خط الأعداد تمثِّل عددًا مكعبه أكبر منه؟



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦- ٤)

٣٤) $(٧أ^{٢}- ٥)+(-٣أ^{٢}+ ١٠)$

٣٥) $(٨ن - ٢ن^{٢})+(٤ن - ٦ن^{٢})$

٣٦) $(٣أ + ٤أب + ٣ب)-(٢ب + ٥أ + ٨أب)$

بسِّط كلًّا من العبارات الآتية: (الدرس٦-١)

٣٧) $(-٢ن^{٤})^{٣}- ٣(-٢ن^{٣})^{٤}$

٣٨) $(-٣هـ^{٢})^{٣}- ٢(-هـ^{٣})^{٢}$

٣٩) $٢(-٥ص^{٣})^{٢}+(-٣ص^{٣})^{٣}$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة :

بسّط كلًّا مما يأتي:

٤٠) $(-٢ت^{٤})^{٣}-٣(-٢ت^{٣})^{٤}$

٤١) $٣(-٦ن^{٤})^{٢}+(-٢ن^{٢})^{٢}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٦-٧

حالات خاصة من ضرب كثيرات الحدود

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درستُ ضرب ثنائيتي حد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

والآن

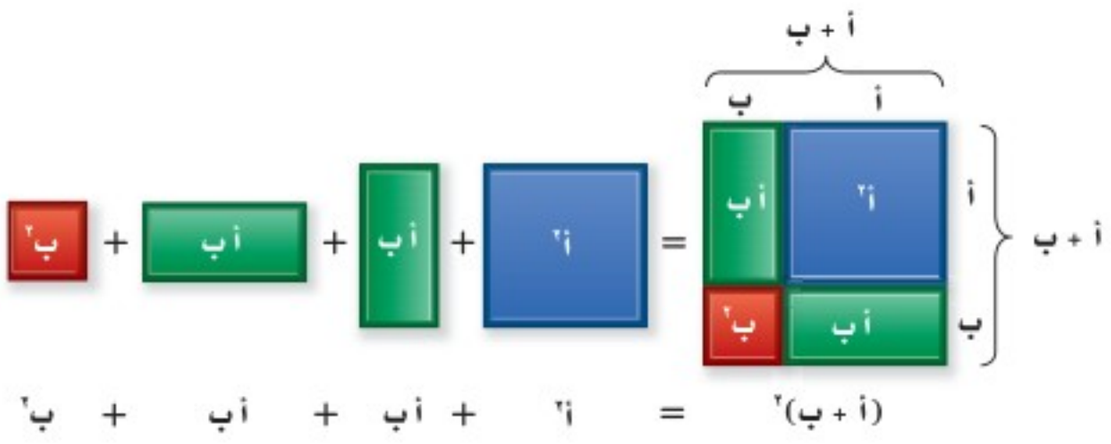
- أجد مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما.
- أجد ناتج ضرب مجموع حدين بالفرق بينهما.

لماذا؟

يريد محمد تثبيت لوحة الرمي بالسهام إلى لوح خشبي مربع الشكل. فإذا كان نصف قطر لوحة السهام هو (نق + ١٢)، فما مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه؟

يعرف محمد أن قطر لوحة السهام هو ٢ (نق + ١٢) = ٢نق + ٢٤. فيكون طول كل ضلع من أضلاع المربع يساوي ٢نق + ٢٤. ولإيجاد مساحة لوح الخشب الذي يحتاج إليه، فإن عليه إيجاد مساحة المربع. م= (٢نق + ٢٤)^{٢}

مربع مجموع حدين ومربع الفرق بينهما: بعض أزواج ثنائيات الحد، كالمربعات مثل (٢نق + ٢٤)^{٢} لها ناتج ضرب يتبع قاعدة معينة. واستعمال هذه القاعدة يسهل من عملية إيجاد ناتج الضرب. فمربع المجموع (أ + ب)^{٢} = (أ + ب) (أ + ب) هو أحد نواتج الضرب تلك.



مفهوم أساسي

مربع مجموع حدين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مربع (أ + ب) هو مربع أ زائد مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافًا إليه مربع ب.

الرموز: (أ + ب)^{٢} = (أ + ب)(أ + ب)= أ^{٢} + ٢أ ب + ب^{٢}

مثال: (س + ٤)^{٢} = (س + ٤)(س + ٤) = س^{٢} + ٨س + ١٦

مثال ١

مربع مجموع حدين

أوجد ناتج: (٣س + ٥)^{٢}.

(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أ ب + ب^{٢} — مربع المجموع

(٣س + ٥)^{٢} = (٣س)^{٢} + ٢(٣س)(٥) + ٥^{٢} — أ = ٣س، ب = ٥

= ٩س^{٢} + ٣٠ س + ٢٥ — بسّط. باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، وتحقق من حلك

تحقق من فهمك

أوجد ناتج كل ممّا يأتي:

١أ) (٨جـ + ٣د)^{٢}

١ب) (٣س + ٤ص)^{٢}

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

ولإيجاد قاعدة مربع الفرق بين حدين، اكتب أ– ب على صورة أ + (– ب)، وربّع الناتج باستعمال قاعدة مربع مجموع حدين.

$(أ - ب)^{٢} = [أ + (-ب)]^{٢} = أ^{٢} + ٢(أ)(-ب) + (-ب)^{٢}$ مربع مجموع حدين

$= أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$ بسّط

مفهوم أساسي

مربع الفرق بين حدين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مربع (أ – ب) هو مربع أ ناقص مثلي حاصل ضرب أ في ب مضافًا إليه مربع ب.

الرموز: $(أ - ب)^{٢} = (أ - ب)(أ - ب) = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$

مثال: $(س - ٣)^{٢} = (س - ٣)(س - ٣) = س^{٢} - ٦س + ٩$

تنبيه !

مربع الفرق بين حدين

تذكّر أن ناتج $(س - ٧)^{٢}$ لا يساوي $س^{٢} - ٧^{٢}$ أو $س^{٢} - ٤٩$، وأن

$(س - ٧)^{٢} =$

$(س - ٧)(س - ٧) =$

$س^{٢} - ١٤س + ٤٩$

مثال ٢ مربع الفرق بين حدين

أوجد ناتج: $(٢س - ٥ص)^{٢}$.

$(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$ مربع الفرق

$(٢س - ٥ص)^{٢} = (٢س)^{٢} - ٢(٢س)(٥ص) + (٥ص)^{٢}$ أ = ٢س ، ب = ٥ص

$= ٤س^{٢} - ٢٠س ص + ٢٥ص^{٢}$ بسّط

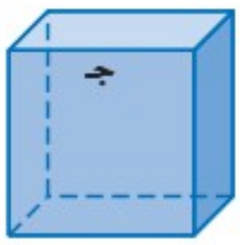
تحقق من فهمك

٢أ) $(٦ب - ١)^{٢}$ **٢ب)** $(أ - ٢ب)^{٢}$

يُسمى ناتج مربع المجموع أو مربع الفرق بين حدين بالمربع الكامل أو ثلاثي الحدود الذي يشكل مربعًا كاملًا. ويمكنك استعمال هذه القواعد لإيجاد أنماط لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٣ من واقع الحياة مربع الفرق بين حدين

فيزياء: **طول ضلع مكعب ألمنيوم أقل من طول ضلع مكعب نحاس بـِ ٤ سم. اكتب معادلة تمثل مساحة سطح مكعب الألمنيوم بدلالة طول ضلع مكعب النحاس.**



ليكن جـ طول ضلع مكعب النحاس، إذن طول ضلع مكعب الألمنيوم جـ – ٤

مساحة السطح $= ٦ل^{٢}$ مساحة سطح المكعب

مساحة السطح $= ٦(جـ - ٤)^{٢}$ عوِّض عن ل بِـ (جـ – ٤)

مساحة السطح $= ٦[جـ^{٢} - ٢(٤)(جـ) + ٤^{٢}]$ مربع الفرق

مساحة السطح $= ٦(جـ^{٢} - ٨جـ + ١٦)$ بسّط

تحقق من فهمك

٣) حديقة: لدى عماد حديقة، طولها وعرضها ل مترًا، ويريد إضافة ٣ أمتار إلى كل من الطول والعرض.

أ) بيِّن كيف يمكن التعبير عن مساحة الحديقة الجديدة بمربع ثنائية حد.

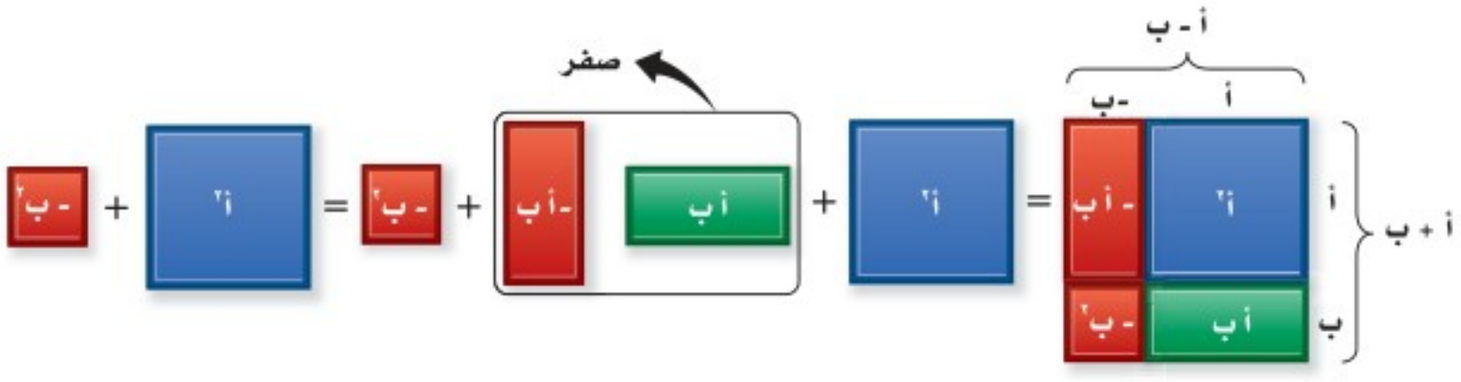
ب) أوجد مربع ثنائية الحد السابقة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إرشادات للدراسة

أنماط: عند استعمال أي من هذه القواعد فإن أ، ب قد يكونان عددين، أو متغيرين، أو عبارتين بأعداد ومتغيرات.

ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما: سنرى الآن ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، (أ+ ب) (أ– ب). تذكر أنه يمكن كتابة أ – ب على الصورة أ + (– ب).



لاحظ أن كلًّا من الحدين الأوسطين هو معكوسٌ جمعي للآخر، ومجموعهما صفر.

لذا فإن (أ + ب)(أ – ب) = أ² – أب + أب – ب² = أ² – ب².

مفهوم أساسي — **ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: ناتج ضرب (أ + ب)، (أ – ب) هو مربع أ ناقص مربع ب.

الرموز: (أ + ب)(أ – ب) = (أ – ب)(أ + ب) = أ² – ب²

مثال ٤ — **ناتج ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما**

أوجد ناتج: (٢س² + ٣)(٢س² – ٣).

(أ + ب)(أ – ب) = أ² – ب² — حاصل ضرب المجموع في الفرق

(٢س² + ٣)(٢س² – ٣) = (٢س²)² – (٣)² — أ = ٢س²، ب = ٣

= ٤س⁴ – ٩ — بسّط

تحقق من فهمك

٤أ) (٣ن + ٢)(٣ن – ٢)

٤ب) (٤جـ – ٧د)(٤جـ + ٧د)

تأكد

المثالان ١، ٢ أوجد ناتج كل مما يأتي:

١) (س + ٥)²

٢) (١١ – أ)²

٣) (٢س + ٧ص)²

٤) (٣م – ٤)(٣م – ٤)

٥) (جـ – ٤هـ)(جـ – ٤هـ)

٦) (٣جـ + ٦د)²

مثال ٣

٧) **ألعاب:** تحوي لعبة القرص الطائر قرصًا على شكل دائرة نصف قطرها (س + ٤) سم.

أ) اكتب عبارة تمثل مساحة القرص الطائر.

ب) إذا كان قطر القرص الطائر ٢٤ سم، فما مساحته؟ (ط ≈ ٣,١٤).

مثال ٤ أوجد ناتج كل مما يأتي:

٨) (أ – ٣)(أ + ٣)

٩) (س + ٥)(س – ٥)

١٠) (٦ص – ٧)(٦ص + ٧)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

١١) (أ + ١٠)(أ + ١٠)

١٢) (ب − ٦)(ب − ٦)

١٣) $(هـ + ٧)^{٢}$

١٤) $(س + ٦)^{٢}$

١٥) $(٨ - م)^{٢}$

١٦) $(٩ - ٢ص)^{٢}$

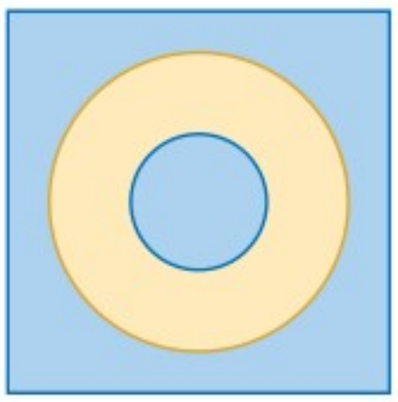
١٧) $(٢ب + ٣)^{٢}$

١٨) $(٥ن - ٢)^{٢}$

١٩) $(٨هـ - ٤ن)^{٢}$

مثال ٣

٢٠) **مصارعة:** تكون سجادة المصارعة في العادة مربعة الشكل، طول ضلعها ١٢ مترًا تقريبًا، وتحتوي على دائرتين كما في الشكل المجاور. افترض أن نصف قطر الدائرة الداخلية (ر) متر، وأن نصف قطر الدائرة الخارجية يزيد على نصف قطر الدائرة الداخلية بِـ ٣ أمتار.



أ) اكتب عبارة تمثِّل مساحة الدائرة الكبرى.

ب) اكتب عبارة تمثِّل مساحة جزء المربع خارج الدائرة الكبرى.

مثال ٤ أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

٢١) (ل + ٣)(ل − ٣)

٢٢) (٤ − س)(٤ + س)

٢٣) (٢ك + ٥ر)(٢ك − ٥ر)

٢٤) $(٣أ^{٢} + ٧ب)(٣أ^{٢} - ٧ب)$

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

٢٥) $(٥ص + ٧)^{٢}$

٢٦) $(٨ - ١٠أ)^{٢}$

٢٧) (٣ن + ١٢)(٣ن − ١٢)

٢٨) $(أ + ٤ب)^{٢}$

٢٩) $(٣ك - ٥ر)^{٢}$

٣٠) $(٢جـ - ٩د)^{٢}$

٣١) $(٣أ^{٤} - ب)(٣أ^{٤} + ب)$

٣٢) $(٥س^{٢} - ص^{٢})^{٢}$

٣٣) $(٨أ^{٢} - ٩ب^{٣})(٨أ^{٢} + ٩ب^{٣})$

٣٤) $\left(\frac{٣}{٤}ك + ٨\right)^{٢}$

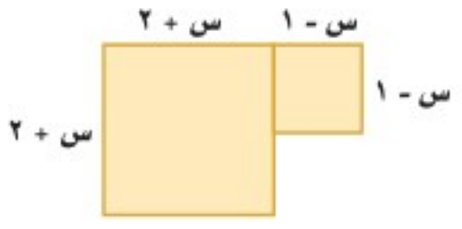
٣٥) $\left(\frac{٢}{٥}ص - ٤\right)^{٢}$

٣٦) $(٧ع^{٢} + ٥ص^{٢})(٧ع^{٢} - ٥ص^{٢})$

٣٧) (٢م + ٣)(٢م − ٣)(م + ٤)

٣٨) (ر + ٢)(ر − ٥)(ر − ٢)(ر + ٥)

٣٩) **هندسة:** اكتب كثيرة حدود تمثِّل مساحة الشكل أدناه.



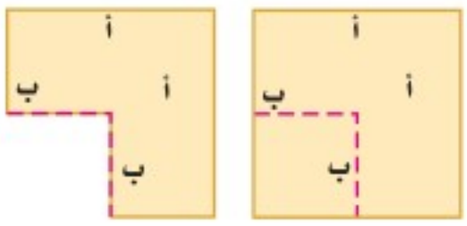
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

أوجد ناتج كلٍّ مما يأتي:

٤٠) (جـ + د)(جـ + د)(جـ + د)　٤١) $(٢أ - ب)^{٣}$　٤٢) (ف + جـ)(ف − جـ)(ف + جـ)

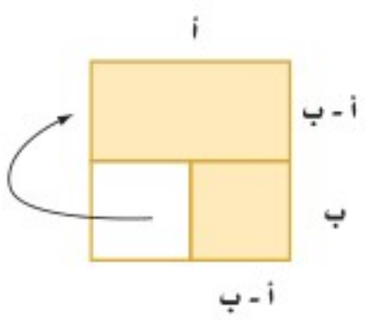
٤٣) (ك − م)(ك + م)(ك − م)　٤٤) $(ن - ب)^{٢}(ن + ب)$　٤٥) $(ك + ر)^{٢}(ك - ر)$

٤٦) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة قاعدة تمثل حاصل ضرب مجموع حدين في الفرق بينهما، ابدأ بورقة مربعات. وارمز إلى طول كل ضلع في المربع بالرمز أ، ثم ارسم مربعًا صغيرًا في إحدى زواياه، وارمز إلى طول ضلعه بالرمز ب.

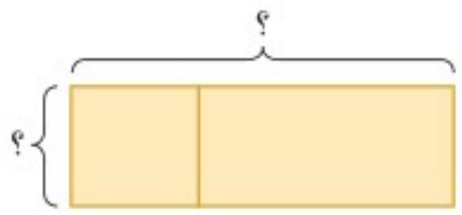


أ) عدديًا: أوجد مساحة كل مربع.

ب) حسيًا: قص المربع الصغير من الزاوية. ما مساحة الشكل المتبقية؟



جـ) تحليليًا: افصل المستطيل الصغير السفلي، ثم دوّره واسحبه إلى جوار المستطيل العلوي. ما طول المستطيل في التمثيل الجديد؟ وما عرضه؟ وما مساحته؟



د) تحليليًا: ما القاعدة التي توصلت إليها من الفقرتين ب، جـ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٧) حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى فيما يأتي:

(٢جـ − د)(٢جـ − د)	(٢جـ + د)(٢جـ − د)	(٢جـ + د)(٢جـ + د)	(جـ + د)(جـ + د)

٤٨) **تحدّ:** هل يوجد قاعدة لمكعب المجموع $(أ + ب)^{٣}$؟

أ) استقصِ إجابة هذا السؤال بإيجاد ناتج: (أ+ ب) (أ+ ب) (أ+ ب).

ب) استعمل القاعدة التي وجدتها في الفرع أ لإيجاد ناتج: $(س + ٢)^{٣}$.

٤٩) **تبرير:** أوجد قيمة جـ التي تجعل من العبارة $٢٥س^{٢} - ٩٠س +$ جـ مربعًا كاملاً.

٥٠) **اكتب:** صف كيف تجد مربع مجموع حدّين ومربع الفرق بين حدّين، وكيف تجد ناتج ضرب مجموع حدّين في الفرق بينهما.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدريب على اختبار

٥١) ما ناتج ضرب (٢أ– ٣) (٢أ– ٣)؟

أ) ٤أ^{٢} + ١٢أ + ٩

ب) ٤أ^{٢} + ٩

جـ) ٤أ^{٢} – ١٢أ – ٩

د) ٤أ^{٢} – ١٢أ + ٩

٥٢) يقطع مروان مسافة ٦كلم في م دقيقة بسيارته. كم دقيقة سيحتاج إليها لقطع ٣٠ كلم بهذا المعدل؟

أ) $\frac{٣}{١٥}$ م

ب) ١٨٠م

جـ) ٥م

د) $\frac{م}{٥}$

مراجعة تراكمية

٥٣) أوجد ناتج (٤هـ – ٣)(٢هـ – ٧): (الدرس ٦- ٦)

٥٤) بسِّط العبارة ٣ب(٦ب – ٤) + ٢$\left(\frac{١}{٢}ب^{٢} - ٣ب\right)$: (الدرس ٦- ٥)

٥٥) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١، ١)، (٤، ٧). (الدرس ٣- ٢)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلل كلًّا من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

٥٦) ٤٠

٥٧) ١٢٠

٥٨) ٩٠٠

٥٩) ١٦٥

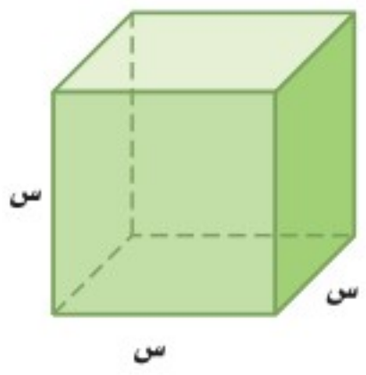
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

بسِّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $(س^{٢})(٧ س^{٨})$

٢) $(٥ أ^{٧} ب جـ^{٢})(-٦ أ^{٢} ب جـ^{٥})$

٣) **اختيار من متعدد:** عبّر عن حجم المجسّم أدناه كوحيدة حد:



أ) $س^{٣}$ ب) ٦ س

جـ) ٦ $س^{٣}$ د) $س^{٦}$

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي:

٤) $(س + ٥) + (س^{٢} - ٣ س + ٧)$

٥) $(٧ م - ٨ ن^{٢} + ٣ ن) - (-٢ن^{٢} + ٤ م - ٣ ن)$

٦) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في شراء سجاد لغرفتين في منزلها أبعادهما مبينة أدناه. فما المساحة الكلية للمنطقة التي ستُغطى بالسجاد؟

أ) $س^{٢} + ٣س$

ب) $س^{٢} + ٣ س - ٥$

جـ) $٢ س^{٢} + ٦ س - ١٠$

د) ٨ س + ١٢

بسِّط كل عبارة فيما يأتي، مفترضًا أن أي مقام لا يساوي صفرًا:

٧) $\frac{س^{٦} ص^{٨}}{س^{٢}}$

٨) $\left(\frac{٢ أ^{٤} ب^{٣}}{جـ^{٦}}\right)^{٠}$

٩) $\frac{٢ س ص^{-٧}}{٨ س}$

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

١٠) $أ(أ^{٢} + ٢ أ - ١٠)$

١١) $(٢ أ - ٥)(٣ أ + ٥)$

١٢) $(س - ٣)(س^{٢} + ٥ س - ٦)$

١٣) $(س + ٣)^{٢}$

١٤) $(٢ب - ٥)(٢ب + ٥)$

١٥) **هندسة:** منشور رباعي قاعدته مستطيلة وأبعاده هي: س، س + ٣، ٢ س + ٥

أ) أوجد حجم المنشور بدلالة س.

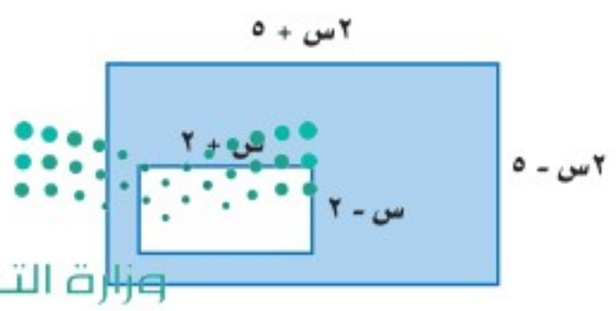
ب) أوجد حجم المنشور بتعويض قيمتين لِـ س، وكيف تقارن بين الحجمين؟

حل كل معادلة فيما يأتي:

١٦) $٥(ن^{٢} - ٣ ن + ٢) = ن(٥ ن - ٢)$

١٧) $٣ س (س + ٢) = ٣(س^{٢} - ٢)$

١٨) **هندسة:** اكتب عبارةً تمثل مساحة المنطقة المظلَّلة في الشكل الآتي:



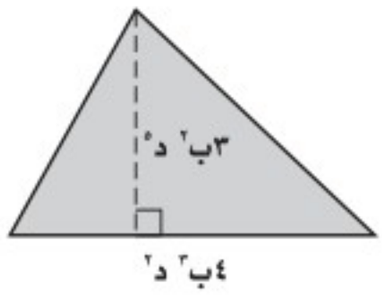
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) عبِّر عن مساحة المثلث أدناه في صورة وحيدة حد؟



أ) ١٢ ب٥ د٧

ب) ١٢ ب٦ د١٠

جـ) ٦ ب٦ د١٠

د) ٦ ب٥ د٧

٢) بسِّط العبارة $\left(\frac{٢ع^{٢}ل^{٥}}{٣س^{٤}}\right)^{٣}$

أ) $\frac{٢ع^{٥}ل^{٨}}{٣س^{٧}}$

ب) $\frac{٨ع^{٦}ل^{١٥}}{٢٧س^{١٢}}$

جـ) $\frac{٨ع^{٥}ل^{٨}}{٢٧س^{٧}}$

د) $\frac{٢ع^{٦}ل^{١٥}}{٣س^{١٢}}$

٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه س^{٢} − ٩ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟

أ) س + ٣

ب) س + ٩

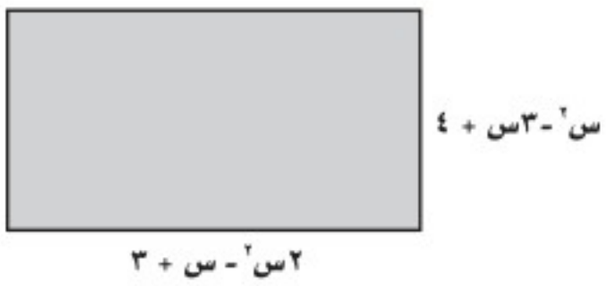
جـ) س − ٩

د) س − ٣

إرشادات للاختبارات

سؤال ٢ : استعمل قوانين الأسس لتبسيط العبارة، وتذكر أنه لإيجاد أس الأس، نضرب الأسس.

٤) عبِّر عن محيط المستطيل أدناه بصورة كثيرة حدود.



أ) ٣س^{٢} − ٤س + ٧

ب) ٣س^{٢} + س + ٧

جـ) ٦س^{٢} − ٨س + ١٤

د) ٦س^{٢} − ٤س + ٧

٥) أوجد ناتج طرح: (٧أ^{٢} + ٦أ − ٢) − (−٤أ^{٣} + ٣أ^{٢} + ٥)

أ) ٤أ^{٣} + ٤أ^{٢} + ٦أ − ٧

ب) ١١أ^{٢} + ٣أ − ٧

جـ) ٤أ^{٣} + ١٠أ^{٢} + ٦أ + ٣

د) ٤أ^{٣} + ٧أ^{٣} − ٣أ

٦) بسّط العبارة: $\frac{هـ^{-٣}ل^{٢}}{هـ^{٣}ل^{-٤}}$

أ) $\frac{هـ^{٦}}{ل^{٦}}$

ب) $\frac{ل^{٦}}{هـ^{٦}}$

جـ) ل^{٢}

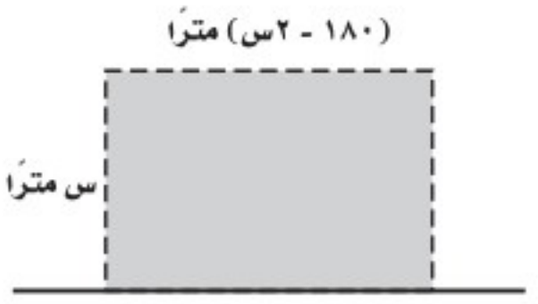
د) هـ^{٦} ل^{٦}

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٧) يريد مزارعٌ زراعة قطعة الأرض المستطيلة المبيَّنة في الشكل:



أ) اكتب كثيرة حدود تعبِّر عن مساحة الأرض.

ب) أوجد مساحة قطعة الأرض، إذا كان عرضها ٤٠ مترًا.

٨) **اكتشف المختلف:** أي العبارات التالية مختلفة؟ فسِّر إجابتك.

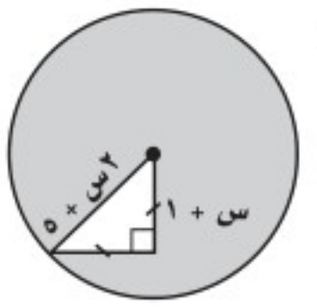
(٣ م − ٢ ن) (٣ م + ٢ ن)

(٣ م + ٢ ن) (٣ م + ٢ ن)

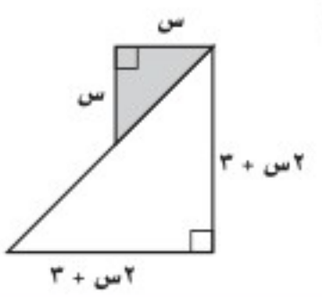
(٣ م + ٢ ن) (٣ م − ٢ ن)

اكتب عبارةً تمثِّل مساحة كل منطقة مظلَّلةٍ ممَّا يأتي:

٩)



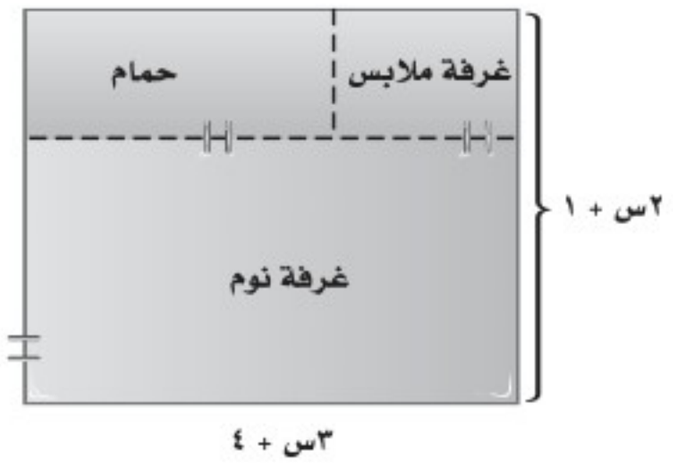
١٠)



إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل:

١١) المخطط التالي يبيِّن تفاصيل جناح نوم:



أ) أوجد مساحة الجناح كاملًا.

ب) إذا كان عرض غرفة الملابس س ، وطولها س + ١ ، فأوجد مساحة غرفة الملابس.

جـ) أوجد مساحة الحمام.

د) أوجد مساحة غرفة النوم.

للمساعدة ..										
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
فراجع الدرس ..	٦-١	٦-٢	٦-٧	٦-٤	٦-٤	٦-٢	٦-٥	٦-٧	٦-٦	٦-٧	٦-٦

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل ٧
التحليل والمعادلات التربيعية

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحدّ وكثيرات الحدود.

والآن

- أحلّل وحيدات الحدّ.
- أحلّل ثلاثيات الحدود.
- أحلّل الفرق بين مربعين.
- أحلّ معادلات تربيعية.

لماذا؟

هندسة عمارة: يمكن استعمال المعادلات التربيعية لنماذج إنشاءات هندسية كأقواس مداخل بعض المباني الضخمة مثل مدخل مطار الملك خالد الدولي في الرياض.

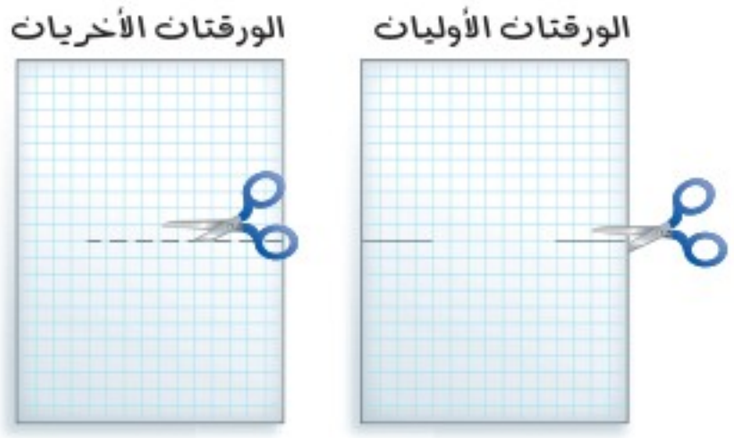
المفردات:

- الصيغة التحليلية ص (٦٠)
- تحليل كثيرة الحدود ص (٦٤)
- المعادلة التربيعية ص (٧٥)
- كثيرة الحدود الأولية ص (٨٣)

المطويات منظم أفكار

التحليل والمعادلات التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول التحليل والمعادلات التربيعية، مبتدئًا بأربع أوراق مربعات.

١ **اطو** الأوراق الأربعة من المنتصف عرضيًّا، وقصَّ ٥سم بدءًا من طرفي خط الطي لأول ورقتين، وقصّ الورقتين الأخريين من المركز، وتوقّف على بعد ٥سم من طرفيها.



٢ **أدْخل** الورقتين الأوليين خلال الورقتين الأخريين، وسمِّ الورَقة الأولى "التحليل والمعادلات التربيعية"، وسمِّ الصفحات الأخرى بأرقام الدروس، وخصص الصفحة الأخيرة للمفردات الجديدة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل ٧

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦ - ٥)

١) أ(أ + ٥)

٢) ٢(٣ + س)

٣) ن(ن − ٣ن^{٢} + ٢)

٤) −٦(س^{٢} − ٥س + ٦)

٥) **مال:** ذهب خمسة أصدقاء إلى متنزه ترفيهي، فاشترى كل منهم بطاقة دخول بِـ ٩ ريالات، وعلبة عصير بـ ٣ ريالات، وشطيرة بـ ٦ ريالات. فاكتب عبارة تمثّل المبلغ الإجمالي الذي دفعوه جميعًا.

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦ - ٦)

٦) (س + ٢)(س − ٥)

٧) (س + ٤)(س − ١)

٨) (٢أ − ٣)(٥أ + ٤)

٩) (٣س − ٤)(س + ٥)

١٠) (س + ٤)(س + ٧)

١١) (٦أ − ٢ب)(٩أ + ب)

١٢) **مِفْرش مائدة:** مِفْرش مائدة مستطيل الشكل إذا كان طوله (٢س+ ٣)، وعرضه (س+ ١)، فاكتب عبارة تُمثلُ مساحته.

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس ٦ - ٧)

١٣) (٣ − أ)^{٢}

١٤) (س + ٥)^{٢}

١٥) (٣س − ٢ص)^{٢}

١٦) (٢س + ٥ص)(٢س − ٥ص)

١٧) **تصوير:** صورة بُعداها: (س+ ٦) سم، (س− ٦) سم. فما مساحتها؟

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة العبارة:
٦س(−٣س − ٥س − ٥س^{٢} + س^{٣})، ثم بسّطها.

٦س(−٣س − ٥س − ٥س^{٢} + س^{٣})

= ٦س(−٣س)+٦س(−٥س)+٦س(−٥س^{٢})+٦س(س^{٣})

= −١٨س^{٢} − ٣٠س^{٢} − ٣٠س^{٣} + ٦س^{٤}

= −٤٨س^{٢} − ٣٠س^{٣} + ٦س^{٤}

مثال ٢

أوجد ناتج الضرب: (س + ٣)(٢س − ١).

(س + ٣)(٢س − ١)	العبارة الأصلية
= س(٢س) + س(−١) + ٣(٢س) + ٣(−١)	طريقة التوزيع بالترتيب
= ٢س^{٢} − س + ٦س − ٣	اضرب
= ٢س^{٢} + ٥س − ٣	اجمع الحدود المتشابهة

مثال ٣

أوجد ناتج: (ص + ٨)^{٢}.

(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}	مربّع مجموع حدّين
(ص + ٨)^{٢} = (ص)^{٢} + ٢(ص)(٨) + ٨^{٢}	أ = ص، ب = ٨
= ص^{٢} + ١٦ص + ٦٤	بسّط

١-٧

تحليل وحيدات الحد

فيما سبق

درست ضرب وحيدات الحدّ وقسمة كثيرة حدود على وحيدة حدّ.

والآن

- أحلّل وحيدة الحدّ إلى عواملها.
- أجد القاسم المشترك الأكبر لوحيدات الحدّ.

المفردات

الصيغة التحليلية

القاسم المشترك الأكبر (ق. م. أ)

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا ؟

تعمل هند قلائد خرز، فإذا كان لديها ٦٠ خرزة فضية اللون، و١٥ خرزة ذهبية اللون، وترغب في أن تحتوي القلادة الواحدة على نوع واحد من الخرز، وفي كلٍّ منها العدد نفسه، وتحوي كلٌّ منها أكبر عدد من الخرز، فستحتاج هند إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين ٦٠ وَ ١٥

تحليل وحيدات الحدّ: تحليل وحيدات الحدّ يشبه تحليل الأعداد الكلية. وتكون وحيدة الحدّ **بالصيغة التحليلية** إذا عُبّر عنها بحاصل ضرب أعداد أولية ومتغيرات بأُسّ ١

عند كتابة وحيدة الحد بالصيغة التحليلية نقول: إننا حللنا وحيدة الحد تحليلاً تامًّا.

مثال ١ تحليل وحيدة الحدّ

حلّل: $-٢٠س^{٣}ص^{٢}$ تحليلًا تامًّا.

$-٢٠س^{٣}ص^{٢} = -١ \times ٢٠س^{٣}ص^{٢}$ — $-٢٠ = -١ \times ٢٠$

$= -١ \times ٢ \times ١٠ \times س \times س \times س \times ص \times ص$ — $٢٠ = ٢ \times ١٠$، $س^{٣} = س \times س \times س$، $ص^{٢} = ص \times ص$

$= -١ \times ٢ \times ٢ \times ٥ \times س \times س \times س \times ص \times ص$ — $١٠ = ٢ \times ٥$

لذا، فإن التحليل للعوامل لوحيدة الحد $-٢٠ س^{٣}ص^{٢}$ هو: $-١ \times ٢ \times ٢ \times ٥ \times س \times س \times س \times ص \times ص$.

تحقق من فهمك

حلّل كل وحيدة حدّ فيما يأتي تحليلًا تامًّا:

١أ) $٣٤س^{٤}ص^{٣}$ **١ب)** $-٥٢أ^{٢}ب$

القاسم المشترك الأكبر: قد يكون لعددين كليين أو أكثر بعضُ العوامل الأولية المشتركة. ويُسمّى حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة القاسمَ (العامل) المشتركَ الأكبرَ لها.

القاسم المشترك الأكبر (ق. م. أ) لعددين أو أكثر هو أكبر عدد يكون عاملًا لكلٍّ من هذه الأعداد، ويمكن إيجاد القاسم المشترك الأكبر لوحيدتي حدٍّ أو أكثر بطريقة مشابهة.

مثال ٢ القاسم المشترك الأكبر لمجموعة من وحيدات الحدّ

أوجد (ق.م.أ) لوحيدتي الحدّ $١٢أ^{٢}ب^{٢}جـ$، $١٨أ ب^{٣}$.

$١٢أ^{٢}ب^{٢}جـ = ٢ \times ٢ \times ٣ \times أ \times أ \times ب \times ب \times جـ$ — حلّل كلّ وحيدة حد تحليلًا تامًّا

$١٨أ ب^{٣} = ٢ \times ٣ \times ٣ \times أ \times ب \times ب \times ب$ — ضع دائرة حول العوامل الأولية المشتركة

إذن، (ق.م.أ) لوحيدتي الحد $١٢أ^{٢}ب^{٢}جـ$، $١٨أ ب^{٣}$ هو $٢ \times ٣ \times أ \times ب \times ب = ٦أ ب^{٢}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحدّ الآتية:

٢أ) ٦س ص^{٣}، ١٨ص ع **٢ب)** ١١أ^{٢}ب، ٢١أ ب^{٢} **٢جـ)** ٣٠ك^{٣}ر^{٢}ن، ٥٠ك^{٢}ر ن

مثال ٣ من واقع الحياة إيجاد (ق.م.أ)

زهور: لدى نورة ٢٠ وردة و٣٠ زنبقةً لعمل باقات زهور. فما أكبر عدد من الباقات المتماثلة يمكن عملها دون ترك أي زهرة؟ وما عدد زهور كل نوع في كل باقة؟

أوجد (ق .م. أ) للعددين ٢٠ وَ٣٠

٢٠ = ٢^{٢} × ٥ اكتب تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية

٣٠ = ٢ × ٣ × ٥ العاملان الأوليان المشتركان هما: ٢، ٥

(ق .م. أ) للعددين ٢٠ وَ ٣٠ هو ٢ × ٥ = ١٠؛ لذا يمكن لنورة عمل ١٠ باقات.

بما أن ٢ × ١٠ = ٢٠، ٣ × ١٠ = ٣٠؛ لذا فستحتوي كل باقة على وردتين و٣ زنابق.

تحقق من فهمك

٣) ما أكبر قيمة يمكن أن تمثّل الطول المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتاهما ٨٤سم^{٢}، ٧٠سم^{٢}، علمًا بأن بُعديْ كل منهما عددان كليان؟

تأكد

مثال ١ حلّل كلَّ وحيدة حد فيما يأتي تحليلاً تامًّا:

١) ١٢جـ^{٢}هـ^{٤} **٢)** −٣٨ر ب^{٢}ن^{٢}

٣) −١٧س^{٣}ص^{٢}ع **٤)** ٢٣أ ب^{٣}

المثالان ٢ ، ٣ أوجد (ق. م. أ) لكل زوج من وحيدات الحدّ الآتية:

٥) ٢٤جـ د^{٣}، ٤٨جـ^{٢}د **٦)** ٧جـ هـ، ١١م ب

٧) ٨س^{٢}ص^{٥}، ٣١س ص^{٣} **٨)** ١٠أ ب، ٢٥أ

٩) هندسة: ما أكبر قيمة يمكن أن تمثّل العرض المشترك لكل من المستطيلين اللذين مساحتاهما ١٥سم^{٢}، ١٦سم^{٢}، علمًا بأن بُعديْ كلٍّ منهما عددان كليان.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حلِّل كل وحيدة حدٍّ فيما يأتي تحليلًا تامًّا:

١٠) ٩٥س ص^{٢} **١١)** −٣٥أ^{٣}جـ^{٢} **١٢)** ٤٢جـ^{٣}هـ^{٣}

١٣) ٨١ن^{٥}ب **١٤)** −١٠٠ك^{٤}ر **١٥)** ١٢١أ ب جـ^{٣}

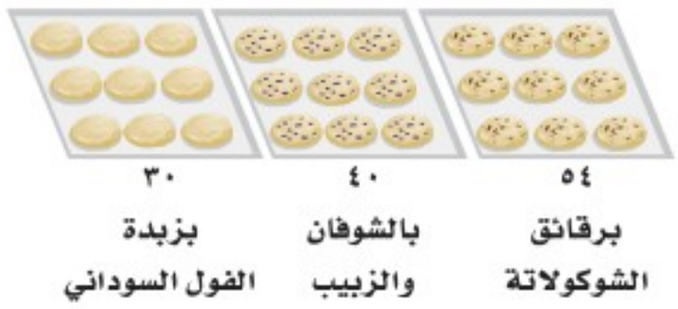
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

المثالان ٢ ، ٣ أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد مما يأتي:

١٦) ٢٥س^{٣}، ٤٥س^{٤}، ٦٥س^{٢} ١٧) ٢٦ع^{٢}، ٣٢ع، ٤٤ع^{٤} ١٨) ٣٠جـ هـ^{٢}، ٤٢جـ^{٢}هـ، ٦٦جـ

١٩) ١٢ك ر، ٨ر^{٢}، ١٦ر ن ٢٠) ٤٢أ^{٢}ب، ٦أ^{٢}، ١٨أ^{٣} ٢١) ١٥ر^{٢}ن، ٣٥ن^{٢}، ٧٠ر ن

٢٢) **كعك:** يريد حامد وضع العدد نفسه من كل نوع من الكعك في كلّ كيس، بحيث يحتوي الكيس على أنواع الكعك جميعها. ما أكبر عدد ممكن من الأكياس يلزمه؟



٢٣) **هندسة:** مساحة مثلث ٢٨سم^{٢}، كم يمكن أن يكون طول كلّ من قاعدته وارتفاعه بالأعداد الكلية؟

٢٤) **كتب:** بكم طريقة تستطيع أسماء تنظيم ٣٦ كتابًا على رفين على الأقل، بحيث يوضع على كلّ رفّ العدد نفسه من الكتب، ولا يقل عن ٤؟

٢٥) **معلبات:** بكم طريقة يستطيع سعيد ترتيب ٨٠ علبة على أربعة رفوف على الأقل، بحيث يكون عدد العلب متساويًا على كل رفٍّ ولا يقل عن ٥؟

٢٦) **تبرّع:** اشترى صقر مجموعة اللوازم المدرسية التالية: ٢٠ قلم رصاص، ١٥٠ ورقة ملونة، ١٢٠ ملف أوراق، ويريد وضعها في حزم متماثلة؛ ليتبرع بها لأكبر عدد ممكن من الطلاب. كم حزمة يمكنه عملها؟ وكم قطعة من كل نوع ستكونُ في كل حزمة؟

٢٧) **نظرية الأعداد:** العددان الأوليان التوأمان هما عددان أوليان فرديّان متتاليان. أول زوجين منهما هما: ٣ وَ٥، ٥ وَ٧. اكتب الأزواج الخمسة التالية لهما.

٢٨) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال طريقة تحليل عدد إلى عوامله الأولية.

العدد ١٢ يكتب على الشكل
٢^{٢} × ٣ عند تحليله لعوامله الأولية

أ) تحليليًا: انسخ مخطط السلم المُبيَّن جانبًا ٦ مرات، وسجِّل في الجزء العلوي الأيمن من كل شكل عددًا كليًّا، بحيث يكون اثنان منها أوليين.

ب) تحليليًا: اختر عاملاً أوليًّا لأحد الأعداد. وسجّل العامل إلى يسار هذا العدد في الشكل، ثم قسّم العددين واكتب الناتج تحت العدد، كرر الخطوات السابقة حتى يصبح ناتج القسمة ١ . وأضف أو احذف أجزاءً من الشكل إذا تطلّب الأمر ذلك، ثم كرّر هذه العملية مع جميع الأعداد.

جـ) لفظيًا: ما التحليل للعوامل الأولية لكل عدد من الأعداد الستة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٩) **تحدّ:** أوجد أصغر زوج من الأعداد يحقّق الشروط الآتية:(ق. م .أ) للعددين يساوي ١١، أحدهما زوجي والآخر فردي، وأحدهما ليس من مضاعفات الآخر.

٣٠) **تبرير:** المضاعف المشترك الأصغر (م. م. أ) لعددين أو أكثر هو أصغر عدد يكون مضاعفًا لكل عدد منها. اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين(ق .م .أ) وَ (م. م. أ) لعددين أو أكثر.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٣١) **تبرير:** هل العبارة "القاسم المشترك الأكبر لأي وحيدتي حد لا يساوي ١ أبدًا" صحيحة أم خاطئة؟ ادعم إجابتك بمثال أو مثال مضاد.

٣٢) **تحدّ:** يُسمّى العددان الصحيحان أو وحيدتا الحدّ أوليين فيما بينهما، إذا كان (ق. م .أ) لهما هو العدد ١ . انقل الجدول المجاور، ثم أكمله لتحدّد أزواج وحيدات الحدّ التي تكون أولية فيما بينها.

وحيدة الحد	التحليل إلى العوامل الأولية
١٥أ^{٢}ب جـ^{٣}	
٦ب ^{٣}جـ^{٣}د	
١٢جـ د^{٢}ف	
٢٢د^{٣}ف ل^{٢}	
٣٠ف^{٢}ل هـ^{٢}	

٣٣) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثلاث وحيدات حد على أن يكون (ق. م. أ) لها ٦ص^{٣}. فسّر إجابتك.

٣٤) **اكتب:** عرّف التحليل إلى العوامل الأولية بكلماتك الخاصة، وفسّر كيف تحلّل وحيدة الحدّ إلى عواملها الأوليَّة، وكيف يساعدك هذا التحليل على تحديد (ق. م .أ) لوحيدتي حدّ أو أكثر.

تدريب على اختبار

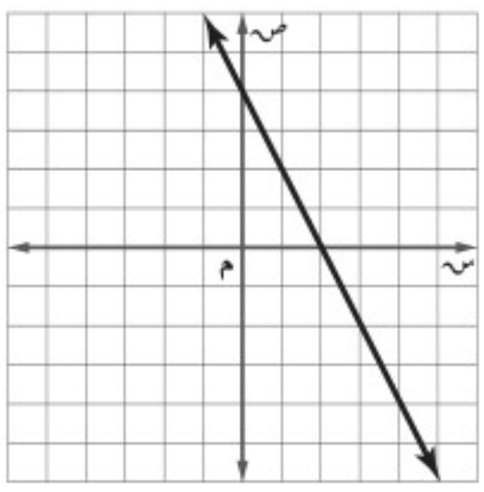
٣٥) ما قيمة هـ في المعادلة ٤هـ−٢٧= ١٩+ ٢هـ ؟

أ) −٤ جـ) ٢٣

ب) ٤ د) ٤٦

٣٦) **إجابة قصيرة:** أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢،−١) ، (−١،٥).

٣٧) ما معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم المُبيَّن في الشكل؟



أ) ص = ٢س + ٤

ب) ص = −٢س − ٥

جـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٦

د) ص = − $\frac{١}{٢}$ س + ٣

مراجعة تراكمية

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦- ٧)

٣٨) (أ − ٤)^{٢} ٣٩) (جـ + ٦)^{٢} ٤٠) (ع − ٥)^{٢}

٤١) (ن − ٣)(ن + ٣) ٤٢) (ص + ٢)^{٢} ٤٣) (د − ٧)(د + ٧)

أوجد ناتج الضرب في كلّ ممّا يأتي: (الدرس ٦- ٦)

٤٤) (٢م − ٣)(م + ٤) ٤٥) (هـ − ٢)(٣هـ − ٥) ٤٦) (ن + ٢)(ن + ٩)

٤٧) (٨ر − ١)(ر − ٦) ٤٨) (ف + ٣ك)(ف + ٣ك) ٤٩) (ن − ٤)(ن + ٢)(ن + ١)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: استعمل خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل عبارة ممَّا ياتي:

٥٠) ٢ (٤س − ٧) ٥١) $\frac{١}{٢}$ د (٢ د + ٦) ٥٢) −هـ (٦ هـ − ١)

٥٣) ٩ م − ٩ ب ٥٤) ٥ ص − ١٠ ٥٥) ٣ع − ٦ س

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٧-٢

استعمال خاصية التوزيع

لماذا ؟

تُحدَّد أجرة متجر حسب مساحته. ويمكن تمثيل مساحة المتجر بالمعادلة م= ٦ , ١ض^{٢} + ٦ض، حيث تمثِّل ض عرض المتجر بالأمتار، ويمكننا استعمال التحليل إلى العوامل وخاصية الضّرب الصفري لإيجاد أبعاد المتجر الممكنة.

استعمال خاصيّة التوزيع في التحليل: استعملت خاصية التوزيع في الفصل السابق لضرب وحيدة حدّ في كثيرة حدود كما في المثال الآتي:

٥ع (٤ع + ٧) = ٥ع (٤ع) + ٥ع (٧)

= ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع

ويمكنك الإفادة من ذلك في العمل عكسيًّا للتعبير عن كثيرة الحدود بصورة حاصل ضرب عاملين: وحيدة الحد، وكثيرة الحدود.

٦ , ١ض^{٢} + ٦ ض= ٦ , ١ض (ض) + ٦(ض) = ض (٦ , ١ض + ٦)

كذلك ٥ع (٤ع + ٧) يمثِّل تحليل ثنائية الحدّ ٢٠ع^{٢} + ٣٥ع. ويشتمل **تحليل كثيرة الحدود** تحليلها إلى عواملها الأوليّة.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست إيجاد (ق .م. أ) لمجموعة من وحيدات الحدّ.

والآن

- أستعمل خاصيّة التوزيع لتحليل كثيرة حدود.
- أحلّ معادلات تربيعيّة على الصورة: أس^{٢} + ب س = ٠

المفردات

تحليل كثيرة حدود

التحليل بتجميع الحدود

خاصية الضرب الصفري

مثال ١ استعمال خاصيّة التوزيع في التحليل

استعمل خاصيّة التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

أ) ٢٧ص^{٢} + ١٨ص

أوجد (ق .م. أ) لجميع الحدود.

٢٧ص^{٢} = ٣ × ٣ × ٣ × ص × ص — حلّل كل حد.

١٨ص = ٢ × ٣ × ٣ × ص — ضع دائرة حول العوامل المشتركة.

(ق .م. أ) = ٣ × ٣ × ص = ٩ص

اكتب كل حدّ على صورة حاصل ضرب (ق .م. أ) في باقي العوامل. واستعمل خاصيّة التوزيع لإخراج (ق .م. أ).

٢٧ص^{٢} + ١٨ص = ٩ص(٣ص) + ٩ص(٢) — أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق .م. أ).

= ٩ص(٣ص + ٢) — خاصية التوزيع.

ب) −٤أ^{٢}ب − ٨أب^{٢} + ٢أب

−٤أ^{٢}ب = −١ × ٢ × ٢ × أ × أ × ب — حلّل كلّ حدّ.

−٨أب^{٢} = −١ × ٢ × ٢ × ٢ × أ × ب × ب — ضع دائرة حول العوامل المشتركة .

٢أب = ٢ × أ × ب

(ق .م. أ) = ٢ × أ × ب = ٢أب

−٤أ^{٢}ب − ٨أب^{٢} + ٢أب = ٢أب(−٢أ) − ٢أب(٤ب) + ٢أب(١) — أعد كتابة كلّ حدّ باستعمال (ق .م. أ).

= ٢أب(−٢أ − ٤ب + ١) — خاصيّة التوزيع

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

١أ) ١٥و – ٣ ف　　**١ب)** ٧ل^{٢}ن^{٢} + ٢١لن^{٢} – ل ن

تُسمّى الطريقة التي تُستعمل فيها خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود تتكوّن من أربعة حدود أو أكثر **التحليل بتجميع الحدود**؛ لأن الحدود تُجمع بطريقة معينة، ثم يحلَّل كل تجميع، ثم تطبق خاصية التوزيع لإخراج عامل مشترك.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التحليل بتجميع الحدود

التعبير اللفظي: يمكن تحليل كثيرة الحدود بتجميع الحدود ، إذا توافرت جميع الشروط الآتية:

- تتكوّن كثيرة الحدود من أربعة حدود أو أكثر.
- يوجد للحدود التي يمكن تجميعها معًا عوامل مشتركة.
- يوجد عاملان مشتركان متساويان أو أن أحدهما نظير جمعيّ للآخر.

الرموز: أس + ب س + أص + ب ص = (أس + ب س) + (أص + ب ص)

= س(أ + ب) + ص(أ + ب)

= (س + ص)(أ + ب)

مثال ٢

التحليل بتجميع الحدود

حلّل: ٤ ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦

٤ك ر + ٨ ر + ٣ ك + ٦	العبارة الأصلية
= (٤ك ر + ٨ ر) + (٣ ك + ٦)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة
= ٤ ر(ك + ٢) + ٣(ك + ٢)	حلّل كل تجميع بإخراج (ق.م.أ)
= (٤ر + ٣) (ك + ٢)	خاصية التوزيع

لاحظ أنّ (ك+ ٢) عامل مشترك لِـ ٤ ر (ك+٢) وَ ٣ (ك+٢).

تحقق من فهمك

حلّل كلاًّ من كثيرات الحدود الآتية :

٢أ) رن + ٥ن – ر – ٥　　**٢ب)** ٣ن ك + ١٥ك – ٤ن – ٢٠

من المفيد معرفة متى تكون إحدى ثنائيتي الحد نظيرًا جمعيًّا للأخرى. فمثلاً ٦ – أ = –١ (أ – ٦)

مثال ٣

التحليل بتجميع الحدود (العوامل نظائر جمعية)

حلّل: ٢م ك – ١٢ م + ٤٢ – ٧ ك

٢م ك – ١٢م + ٤٢ – ٧ ك	العبارة الأصلية
= (٢م ك – ١٢م) + (٤٢ – ٧ ك)	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.
= ٢م(ك – ٦) + ٧(٦ – ك)	حلّل كلّ تجميع بإخراج (ق. م. أ).
= ٢م(ك – ٦) + ٧[(–١)(ك – ٦)]	٦ – ك = –١ (ك– ٦)
= ٢م(ك – ٦) – ٧(ك – ٦)	خاصيّة التجميع
= (٢م – ٧)(ك – ٦)	خاصيّة التوزيع

إرشادات للدراسة

تحقق

تحقق من صحة التحليل بضرب العوامل الناتجة بعضها في بعض؛ للحصول على العبارة الأصلية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية :

٣أ) جـ – ٢جـ د + ٨ د – ٤ **٣ب)** ٣ف – ٢ف^{٢} – ١٨ف + ٢٧

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكنك حلّ بعض المعادلات بالتحليل .

انظر إلى الجمل الآتية: ٣(٠) = ٠ ٠(٢ – ٢) = ٠ –٣١٢(٠) = ٠ ٠(٠,٢٥) = ٠

لاحظ أن أحد العاملين على الأقل في كلّ حالة يساوي صفرًا. وتبيِّن هذه الأمثلة **خاصيّة الضّرب الصفري**.

مفهوم أساسي — خاصية الضرب الصفري

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان حاصل ضرب عاملين يساوي صفرًا، فيجب أن يكون أحدهما على الأقل صفرًا.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب، إذا كان أ ب = ٠، فإنّ أ = ٠، أو ب = ٠، أو أن كليهما يساوي صفرًا.

سبق أن تعلمت أن حلّ المعادلة أو جذرها هو أيّ قيمة للمتغير تجعلها صحيحة.

مثال ٤ — حل المعادلات

حلّ كلاًّ من المعادلات الآتية وتحقق من صحة الحل:

أ) (٢د + ٦)(٣د – ١٥) = ٠

(٢د + ٦)(٣د – ١٥) = ٠ — المعادلة الأصلية

٢د + ٦ = ٠ أو ٣د – ١٥ = ٠ — خاصية الضرب الصفري

٢د = –٦ ٣د = ١٥ — حلّ كل معادلة

د = –٣ د = ٥ — اقسم

الجذران هما –٣ ، ٥

تحقّق: عوّض عن د بكلٍّ من –٣، ٥ في المعادلة الأصلية.

(٢د + ٦)(٣د – ١٥) = ٠ (٢د + ٦)(٣د – ١٥) = ٠

[٢(–٣) + ٦][٣(–٣) – ١٥] ≟ ٠ [٢(٥) + ٦][٣(٥) – ١٥] ≟ ٠

(–٦ + ٦)(–٩ – ١٥) ≟ ٠ (١٠ + ٦)(١٥ – ١٥) ≟ ٠

(٠)(–٢٤) ≟ ٠ ١٦(٠) ≟ ٠

٠ = ٠ ✓ ٠ = ٠ ✓

ب) جـ^{٢} = ٣جـ

جـ^{٢} = ٣جـ — المعادلة الأصلية

جـ^{٢} – ٣جـ = ٠ — اطرح ٣ جـ من كل طرف للحصول على صفر في أحد طرفي المعادلة.

جـ(جـ – ٣) = ٠ — حلّل باستعمال (ق.م.أ) للحصول على الصورة أ ب = ٠

جـ = ٠ أو جـ – ٣ = ٠ — خاصيّة الضرب الصفري

جـ = ٣ — حلّ كلّ معادلة

الجذران هما ٠ ، ٣ — تحقّق بتعويض كل من صفر، ٣ بدلاً من جـ

تنبيه!

قيمة غير معروفة

قد تجد أنه من الأسهل حلّ معادلة بقسمة كلّ طرف منها على متغير. وبما أن قيمة المتغير غير معروفة، لذا قد تقسم في هذه الحالة على صفر، والقسمة على صفر غير معرّفة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

٤أ) ٣ن(ن + ٢) = ٠ **٤ب)** ٨ب^{٢} − ٤٠ب = ٠ **٤جـ)** س^{٢} = −١٠س

مثال ٥ من واقع الحياة — استعمال التحليل

رمي السهم: يمكن تمثيل ارتفاع سهم بالمعادلة ع = −٥ ن^{٢} + ٢٠ ن، حيث (ع) الارتفاع بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني. إذا أهمل ارتفاع رامي السهام، بعد كم ثانية يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه؟

عندما يصل السهم إلى الأرض ع = ٠

ع = −٥ن^{٢} + ٢٠ ن	المعادلة الأصلية
٠ = −٥ن^{٢} + ٢٠ ن	عوّض عن ع بـ ٠
٠ = ٥ ن (− ن + ٤)	حلّل بإخراج (ق .م.أ)
٥ ن = ٠ أو − ن + ٤ = ٠	خاصيّة الضرب الصفري
ن = ٠ أو −ن = −٤	حلّ كلّ معادلة
ن = ٤	اقسم كل حد على −١

يصل السهم إلى الأرض بعد إطلاقه بِـ ٤ ثوانٍ.

تحقق من فهمك

٥) قفز الأرنب: يمكن تمثيل قفزة الأرنب بالمعادلة ع= ٥ , ٢ن− ٥ن^{٢}؛ حيث تمثل (ع) ارتفاع القفزة بالمتر، و(ن) الزمن بالثواني. أوجد قيمة ن عندما ع= صفرًا.

الربط مع الحياة

يتطلب رمي السهم أو الرمي بالقوس تركيزًا عاليًا ومهارة ودقة في التصويب؛ لضمان إصابة الهدف.

تأكد

مثال ١ استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود الآتية:

١) ٢١ب − ١٥أ **٢)** ١٤جـ^{٢} + ٢جـ **٣)** ١٢لك^{٢} + ٦ل^{٢}ك + ٢ل^{٢}ك^{٢}

المثالان ٢ ، ٣ حلّل كلاً من كثيرات الحدود الآتية:

٤) ن م + ٢ن + ٨م + ١٦ **٥)** س ص − ٧س + ٧ص − ٤٩ **٦)** ٣ب جـ − ٢ب − ١٠ + ١٥جـ

مثال ٤ حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٧) ٣ك(ك + ١٠) = ٠ **٨)** (٤م + ٢)(٣م − ٩) = ٠ **٩)** ر^{٢} = ١٤ر

مثال ٥ ١٠) صواريخ: أُطلق صاروخ إلى أعلى بشكل مستقيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٢ م/ ثانية. وتمثّل المعادلة ع = ٤٢ ن − ٥ن^{٢} ارتفاع الصاروخ (ع) بالأمتار فوق مستوى سطح الأرض بعد ن ثانية.

أ) ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟

ب) حلّ المعادلة ٤٢ ن − ٥ ن^{٢} = ٠

جـ) كم ثانية يحتاج إليها الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدرب وحل المسائل

مثال ١ استعمل خاصية التوزيع لتحليل كلّ من كثيرات الحدود الآتية:

١١) ١٦ن − ٤٠ص

١٢) ٣٠ف + ٥٠س

١٣) ٢ك^{٢} + ٤ك

١٤) ٥ع^{٢} + ١٠ع

١٥) ٤أ^{٢}ب^{٢} + ٢أ^{٢}ب − ١٠أب^{٢}

١٦) ٥جـ^{٢}ف − ١٥جـ^{٢}ف^{٢} + ٥جـ^{٢}ف^{٣}

المثالان ٢ ، ٣ حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية:

١٧) أ^{٢} − ٤أ − ٢٤ + ٦أ

١٨) هـل − ٢هـ + ٥ل − ١٠

١٩) س ص − ٢س − ٢ + ص

٢٠) ٢٤ن ص − ١٨ن + ٤ص − ٣

٢١) ٣دن − ٢١د + ٣٥ − ٥ن

٢٢) ٨ر^{٢} + ١٢ر

٢٣) ٢١ن هـ − ٣ن − ٣٥هـ + ٥

٢٤) ل ف + ١٢ل + ٨ف + ٩٦

٢٥) ٥ب ر − ٢٥ب + ٢ر − ١٠

٢٦) ٢ن و − ٨و + ٣ن − ١٢

٢٧) ٥جـ ف^{٢} + جـ^{٢}ف + ١٥جـ ف

٢٨) رف − ٩ر + ٩ف − ٨١

٢٩) ١٨ر^{٣}ن^{٢} + ١٢ر^{٢}ن^{٢} − ٦ر^{٢}ن

٣٠) ١٦جـ هـ + ٢٤جـ − ٢هـ − ٣

مثال ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٣١) ٣ب(٩ب − ٢٧) = ٠

٣٢) ٢ن(٣ن + ٣) = ٠

٣٣) (٨ع + ٤)(٥ع + ١٠) = ٠

٣٤) (٧س + ٣)(٢س − ٦) = ٠

٣٥) ب^{٢} = −٣ب

٣٦) أ^{٢} = ٤أ

مثال ٥

٣٧) **فروسية:** يمكن تمثيل ارتفاع قفزة فرس في سباق الحواجز بالمعادلة ع = −٥ن^{٢} + ٥ن؛ حيث (ن) تمثل الزمن بالثواني.

أ) اكتب عبارة تمثّل الارتفاع على صورة حاصل ضرب عوامل.

ب) أوجد قيم ن عندما ع = ٠؟

جـ) ما الارتفاع الذي يكون عليه الفارس بعد ٣ ثوانٍ من بداية القفز؟ وهل هذا ممكن؟ فسِّر إجابتك.

٣٨) **هندسة عمارة:** يمكن تمثيل إطار قوس بوابة بالمعادلة ص = −١,٠ س^{٢} + ١٢س؛ حيث س، ص بالسنتمتر. ومحور السينات يمر بطرفي القوس على الأرض.

أ) كوّن جدولًا لارتفاع القوس إذا كان س = ٠، ٢٠، ٤٠، ٦٠، ٨٠، ١٠٠ سم.

ب) مثّل نقاط الجدول في المستوى الإحداثي، وصِل بين النقاط لتكوّن منحنى يمثّل القوس.

جـ) ما أقصى ارتفاع لقوس البوابة؟

الربط مع الحياة

حقق فريق الفروسية في المملكة المركز الثاني في بطولة العالم للفروسية للفردي قفز الحواجز عام ٢٠١٠م.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٣٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة طريقة الصندوق للتحليل، ممثلاً لتحليل س^{٢} + س − ٦، اكتب أول حد في الزاوية اليمنى العليا من الصندوق، ثم اكتب آخر حد في الزاوية السفلى اليسرى.

؟	؟
؟	س^{٢}
؟	−٦

أ) تحليليًا: حدّد عددين ناتج ضربهما −٦، وناتج جمعهما ١.

ب) رمزيًا: اكتب كل عامل منهما في المربع الفارغ، متضمنًا المتغير وإشارته الموجبة أو السالبة.

جـ) تحليليًا: أوجد عوامل كل صف وعمود في الصندوق، ثم أوجد عوامل س^{٢} + س − ٦.

د) لفظيًا: صف كيف تستعمل طريقة الصندوق لتحليل س^{٢} − ٣س − ٤٠.

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٠) **اكتشف الخطأ:** يحلّ كل من حمد وراشد المعادلة ٢ م^{٢} = ٤ م. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

راشد

٢م^{٢} = ٤م

٢م^{٢} − ٤م = ٠

٢م(م − ٢) = ٠

٢م = ٠ أو م − ٢ = ٠

م = ٠ أو م = ٢

حمد

٢م^{٢} = ٤م

$\frac{٢م^{٢}}{م٢} = \frac{٤م}{م٢}$

م = ٢

٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب كثيرة حدود بأربعة حدود، يمكن تحليلها بتجميع الحدود، ثم حلّلها.

٤٢) **تبرير:** في المعادلة جـ = أ^{٢} − أ ب، ما قيم أ، ب التي تجعل جـ = ٠؟

٤٣) **اكتب:** وضِّح كيف تحل معادلة تربيعية باستعمال خاصيّة الضرب الصفري.

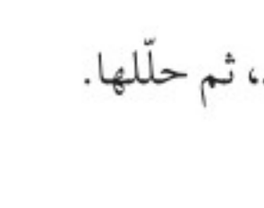
تدريب على اختبار

٤٤) أي مما يأتي يمثِّل عاملاً لكثيرة الحدود: ٦ع^{٢} − ٣ع − ٢ + ٤ع؟

أ) ٢ع + ١ **جـ)** ع + ٢

ب) ٣ع − ٢ **د)** ٢ع − ١

٤٥) **هندسة:** إذا كانت مساحة المثلث القائم الزاوية المبين أدناه ٥ س سم^{٢}، فما ارتفاعه؟



أ) ٢ سم **جـ)** ٨ سم

ب) ٥ سم **د)** ١٠ سم

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

أوجد (ق .م. أ) لكل مجموعة وحيدات حدود مما يأتي: (الدرس ٧- ١)

٤٦) ٣٠أ^{٢}، ٥٠أب^{٢} ٤٧) ٨جـ^{٢}د^{٣}، ١٦جـ^{٣}د ٤٨) ٤ص، ١٨ص^{٢}، ٦ص^{٣}

بسّط كلّ عبارة فيما يأتي: (الدرس ٦- ١)

٤٩) (أب^{٤})(أب^{٢}) ٥٠) (-٧جـ^{٣}د^{٤})(٤جـ د^{٣}) ٥١) (٩س ص^{٧})^{٢} ٥٢) [(٢٤)^{٣}]^{٢}

٥٣) حلّ المتباينة ٣ص- ٤ > -٣٧، وتحقق من صحة الحل. (الدرس ٤- ٣)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي:

٥٤) (ب + ٢) (ب + ٥) ٥٥) (د + ٤) (د + ١٠) ٥٦) (ع - ١) (ع - ٨)

٥٧) (جـ + ٩) (جـ - ٣) ٥٨) (س - ٧) (س - ٦) ٥٩) (هـ - ٢) (هـ + ١١)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحليل ثلاثية الحدود

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

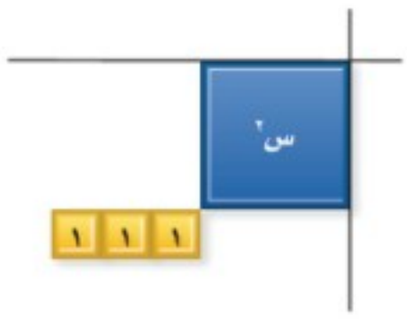
يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحليل ثلاثية الحدود. فإذا مثّلت كثيرة الحدود مساحة مستطيل مُكوّن من بطاقات الجبر، فإن بعديه يمثّلان عاملين لكثيرة الحدود، أما إذا لم يكن بالإمكان تكوين مستطيل يمثّل ثلاثية الحدود، فإن ثلاثية الحدود تكون غير قابلة للتحليل.

نشاط ١ تحليل العبارة: $س^٢ + ب س + جـ$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^٢ + ٤س + ٣$

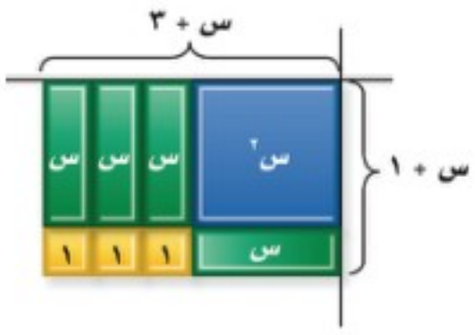
الخطوة ١: مثّل $س^٢ + ٤س + ٣$ ببطاقات الجبر.

الخطوة ٢: ضع البطاقة $س^٢$ في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ كما في الشكل المجاور، لتكوّن مستطيلاً. بما أن ٣ عدد أولي، فإنه يمكن ترتيب البطاقات الثلاث بمستطيل بطريقة واحدة، هي ١ في ٣.



الخطوة ٣: أكمل تكوين المستطيل ببطاقات س، فيكون بذلك عرض المستطيل س+ ١، وطوله س+ ٣

إذن: $س^٢ + ٤س + ٣ = (س + ١)(س + ٣)$.

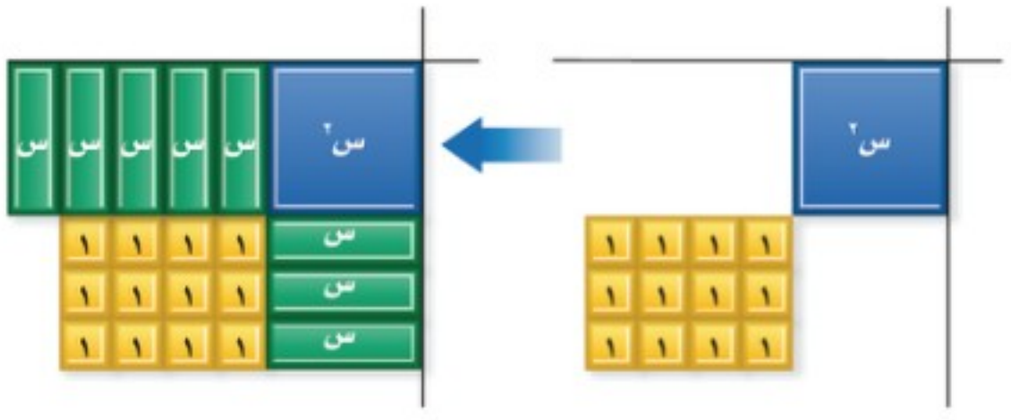


نشاط ٢ تحليل العبارة: $س^٢ + ب س + جـ$

استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: $س^٢ + ٨س + ١٢$

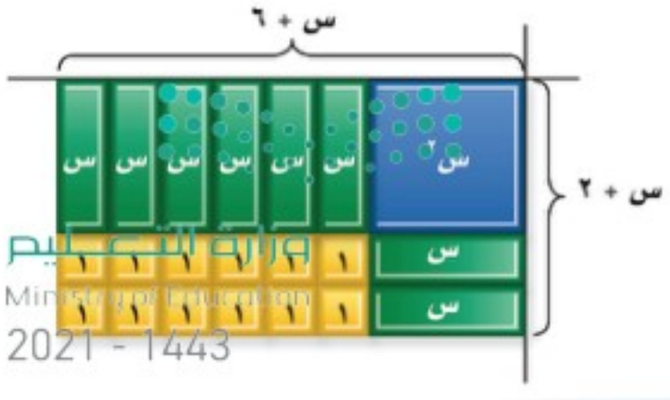
الخطوة ١: مثّل $س^٢ + ٨س + ١٢$ ببطاقات الجبر.

الخطوة ٢: ضع بطاقة $س^٢$ في زاوية لوحة الضرب، ورتّب بطاقات العدد ١ لتكوّن مستطيلاً. وبما أن $١٢ = ٣ \times ٤$، فحاول إنشاء مستطيل أبعاده ٣ وَ ٤، وحاول إكمال الشكل العام لمستطيل باستعمال بطاقات س، ثم لاحظ أن هناك بطاقات إضافية.



الخطوة ٣: رتّب بطاقات العدد ١ بمستطيل أبعاده ٢ وَ ٦ ثم أكمل المستطيل، وفي هذه الحالة تكون قد استعملت جميع بطاقات س لتكوين المستطيل. ويكون عرض المستطيل س+ ٢، وطوله س+ ٦

إذن $س^٢ + ٨س + ١٢ = (س + ٢)(س + ٦)$.



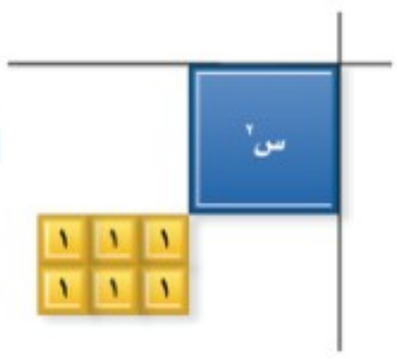
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

نشاط ٣ تحليل العبارة: س^{٢} - ب س + جـ

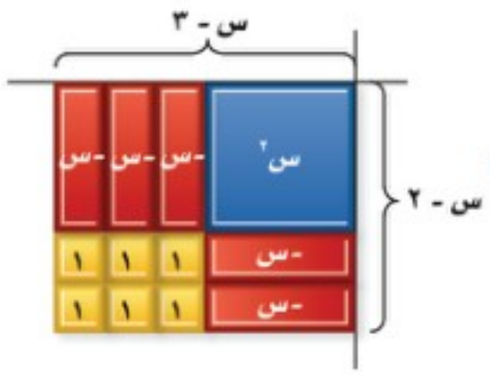
استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: س^{٢} – ٥س + ٦

الخطوة ١ : مثّل س^{٢} – ٥س + ٦

الخطوة ٢ : ضع بطاقة س^{٢} في زاوية لوحة الضرب.
ورتّب البطاقات ١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده ٢ وَ ٣



الخطوة ٣ : أكمل تكوين المستطيل ببطاقات –س. فيكون بذلك عرضه س– ٢، وطوله س–٣
إذن س^{٢} – ٥س + ٦ = (س – ٢) (س –٣)

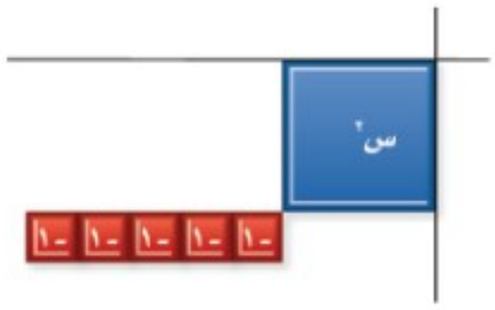


نشاط ٤ تحليل العبارة: س^{٢} - ب س - جـ

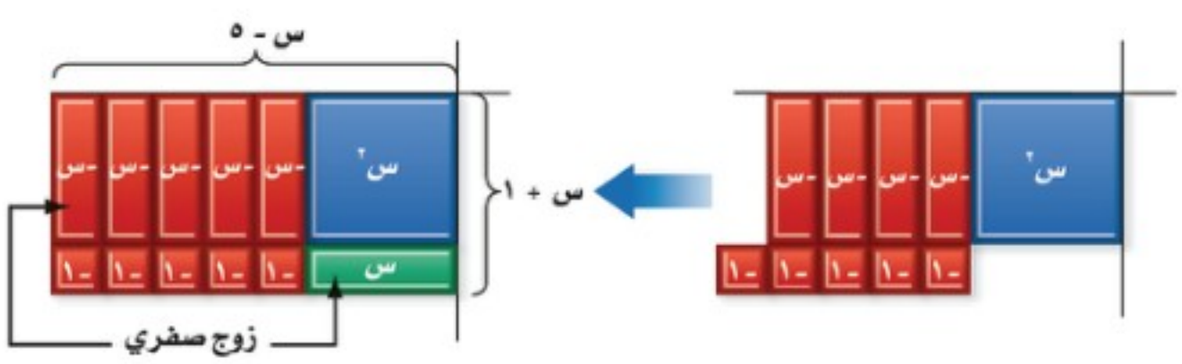
استعمل بطاقات الجبر لتحليل العبارة: س^{٢} – ٤س – ٥.

الخطوة ١ : مثل س^{٢} – ٤س – ٥

الخطوة ٢ : ضع بطاقة س^{٢} في زاوية لوحة الضرب،
ورتّب بطاقات العدد –١ لتكوّن مستطيلاً أبعاده ١ وَ ٥



الخطوة ٣ : ضع البطاقات –س كما في الشكل. وتذكّر أنه يمكنك إضافة أزواج صفرية دون تغيير قيمة كثيرة الحدود. وفي هذه الحالة، أضف زوجًا صفريًّا من البطاقات س، –س.
لذا فإن س^{٢} – ٤س – ٥ = (س + ١) (س – ٥)



التمثيل والتحليل:

استعمل بطاقات الجبر لتحليل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

١) س^{٢} + ٣س + ٢ ٢) س^{٢} + ٦س + ٨ ٣) س^{٢} + ٣س – ٤ ٤) س^{٢} – ٧س + ١٢

استعمل الرسم بمخطط لتبيّن إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي قابلة للتحليل أم لا :

٥) س^{٢} + ٣س + ٦ ٦) س^{٢} – ٥ س – ٦ ٧) س^{٢} – ٤ ٨) س^{٢} – س – ٤

٩) **اكتب** كيف يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتحدد إذا كانت ثلاثية حدود قابلة للتحليل؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٧-٣

المعادلات التربيعية: س^{٢} + ب س + جـ = ٠

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درستُ ضرب ثنائيات الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب.

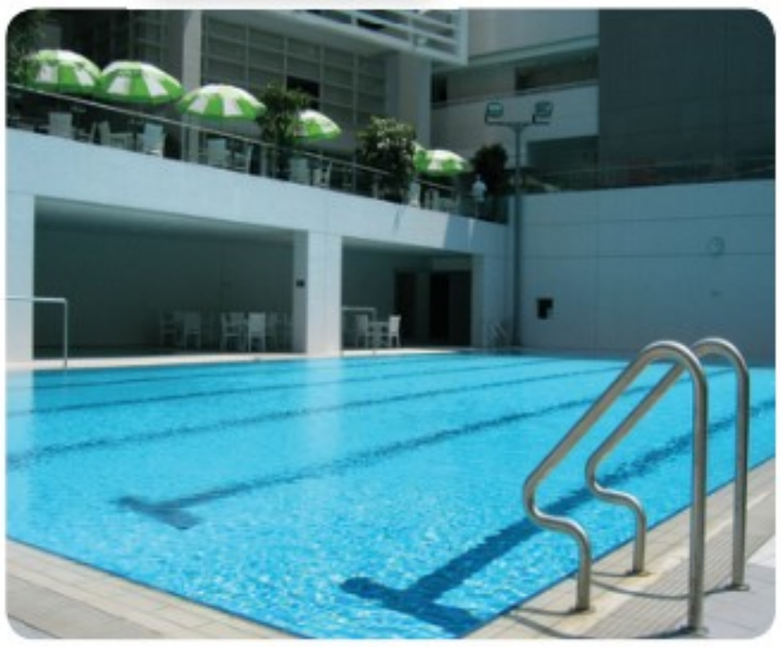
والآن

- أحلّل ثلاثية حدود على الصورة: س^{٢} + ب س + جـ.
- أحلّ المعادلات على الصورة: س^{٢} + ب س + جـ = ٠

المفردات

المعادلة التربيعية

لماذا؟



بركة سباحة سطحها مستطيل الشكل، يُراد وضع سياج حولها طوله ٢٤ م. إذا كانت مساحة سطح البركة ٣٦ م^{٢}، فما بعداها؟

لحل هذه المسألة يجب إيجاد عددين حاصل ضربهما ٣٦ وَمجموعهما يساوي ١٢ (نصف محيط البركة).

تحليل س^{٢} + ب س + جـ: تعلمت كيف تضرب ثنائيتي حدّ باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب، على أن تكون كل ثنائية حد منهما عاملاً لناتج الضرب. ويمكن استعمال نمط ضرب ثنائيتي الحد لتحليل أنواع معينة من ثلاثيات الحدود.

(س + ٣) (س + ٤) = س^{٢} + ٤س + ٣س + ٣ × ٤ — طريقة التوزيع بالترتيب

= س^{٢} + (٤ + ٣)س + ٣ × ٤ — خاصية التوزيع

= س^{٢} + ٧س + ١٢ — بسّط.

لاحظ أن معامل الحدّ الأوسط ٧ هو مجموع العددين ٣ و٤، والحد الأخير ١٢ هو ناتج ضربهما.

لاحظ القاعدة الآتية في الضرب:

(س + ٣) (س + ٤) = س^{٢} + (٤ + ٣) س + (٤ × ٣)

(س + م) (س + ن) = س^{٢} + (ن + م) س + م ن — لتكن ٣ = م، ٤ = ن

= س^{٢} + (م + ن) س + م ن — الإبدال (+)

س^{٢} + ب س + جـ — ب = م + ن، جـ = م ن

لاحظ أن معامل الحد الأوسط هو مجموع م وَ ن، والحدّ الأخير هو ناتج ضربهما.

تستعمل هذه القاعدة لتحليل ثلاثيات الحدود على الصورة س^{٢} + ب س + جـ.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

تحليل س^{٢} + ب س + جـ

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة س^{٢} + ب س + جـ، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما ب، وناتج ضربهما جـ، ثم اكتب س^{٢} + ب س + جـ على الصورة (س + م) (س + ن).

الرموز: س^{٢} + ب س + جـ = (س + م) (س + ن)، حيث م + ن = ب، م ن = جـ

مثال: س^{٢} + ٦س + ٨ = (س + ٢) (س + ٤). لأن ٢ + ٤ = ٦، ٢ × ٤ = ٨

يكون لعاملي جـ الإشارة نفسها عندما تكون موجبة. ويعتمد كون العاملين موجبين أو سالبين على إشارة ب. فإذا كانت ب موجبة فالعاملان موجبان، وإذا كانت سالبة فالعاملان سالبان.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ١ تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما يكون ب، جـ موجبين

حلّل : س^{٢} + ٩س + ٢٠.

بما أن جـ، ب موجبان في ثلاثية الحدود، ب = ٩، جـ = ٢٠. لذا يجب إيجاد عاملين موجبين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠. كوّن قائمة عوامل العدد ٢٠، و أوجد العاملين اللذين مجموعهما ٩.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
١، ٢٠	٢١
٢، ١٠	١٢
٤، ٥	٩

العاملان الصحيحان هما ٤، ٥

س^{٢} + ٩س + ٢٠ = (س + م)(س + ن) — اكتب القاعدة

= (س + ٤)(س + ٥) — م = ٤، ن = ٥

تحقق: يمكنك التحقق من هذه النتيجة بضرب العاملين لتحصل على العبارة الأصلية.

(س + ٤)(س + ٥) = س^{٢} + ٥س + ٤س + ٢٠ — طريقة التوزيع بالترتيب

= س^{٢} + ٩س + ٢٠ ✓ — بسّط.

تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

١أ) د^{٢} + ١١د + ٢٤ **١ب)** ٩ + ١٠ن + ن^{٢}

إرشادات لحل المسألة

خمّن وتحقّق

عند تحليل ثلاثية حدود، اعمل تخمينًا مدروسًا، وتحقق من المعقولية، ثم عدّل التخمين حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

إذا كانت ب سالبة، وجـ موجبة في ثلاثية الحدود، استعمل ما تعرفه عن ضرب ثنائيتي الحد؛ لتقليص قائمة العوامل الممكنة.

مثال ٢ تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما تكون ب سالبة، جـ موجبة

حلّل: س^{٢} − ٨س + ١٢

بما أن جـ موجبة، و ب سالبة في ثلاثية الحدود ، ب= −٨، جـ = ١٢ لذا يجب إيجاد عاملين سالبين مجموعهما −٨ وحاصل ضربهما ١٢

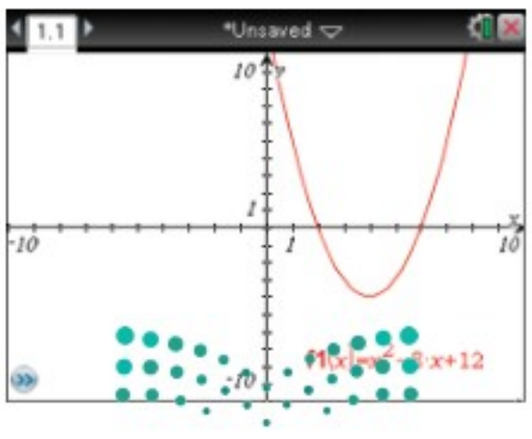
عوامل العدد ١٢	مجموع العاملين
−١، −١٢	−١٣
−٢، −٦	−٨
−٣، −٤	−٧

العاملان الصحيحان هما −٢، −٦

س^{٢} − ٨س + ١٢ = (س + م)(س + ن) — اكتب القاعدة

= (س − ٢)(س − ٦) — م = −٢، ن = −٦

تحقق: مثّل المعادلتين: ص= س^{٢} − ٨س + ١٢، ص= (س−٢) (س− ٦) بيانيًّا على الشاشة نفسها. بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُللت بصورة صحيحة. ✓



تحقق من فهمك

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

٢أ) ٢١ − ٢٢م + م^{٢} **٢ب)** و^{٢} − ١١و + ٢٨

إرشادات للدراسة

إيجاد العوامل

عندما تجد العوامل الصحيحة فليس هناك ضرورة لاختبار العوامل الأخرى. فمثلاً، العاملان الصحيحان في المثال٢ هما: −٢ وَ −٦، لذا فلا داعي لاختبار العاملين: −٣ وَ −٤

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

عندما تكون جـ سالبة، يكون لعامليها إشارتان مختلفتان. ولتحدد أي عامل منهما موجب وأيهما سالب، انظر إلى إشارة ب؛ فالعامل الذي له القيمة المطلقة الكبرى له إشارة ب نفسها.

مراجعة المفردات

القيمة المطلقة

تمثل القيمة المطلقة للعدد ن المسافة بين العدد والصفر على خط الأعداد. وتُكتب على الصورة | ن |.

مثال ٣ تحليل س^{٢} + ب س + جـ عندما تكون جـ سالبة

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

أ) س^{٢} + ٢س − ١٥

في ثلاثية الحدود هذه ب = ٢، جـ = −١٥ وبما أن جـ سالبة. فإن م وَ ن عددان مختلفان في الإشارة. وبما أن ب موجبة، فالعامل الذي قيمته المطلقة أكبر يكون موجبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل العدد −١٥، على أن يكون أحد العاملين في كل زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما ٢.

عوامل العدد −١٥	مجموع العاملين
−١، ١٥	١٤
−٣، ٥	٢

العاملان الصحيحان هما −٣، ٥

س^{٢} + ٢س − ١٥ = (س + م)(س + ن) — اكتب القاعدة

= (س − ٣)(س + ٥) — م = −٣، ن = ٥

تحقق: (س − ٣) (س + ٥) = س^{٢} + ٥س − ٣س − ١٥ — طريقة التوزيع بالترتيب

= س^{٢} + ٢س − ١٥ ✓ — بسّط

ب) س^{٢} − ٧س − ١٨

في ثلاثية الحدود هذه ب = −٧، جـ = −١٨ . ، إذن م أو ن سالبة، وليس كلاهما. وبما أن ب سالبة، فالعامل ذو القيمة المطلقة الكبرى يكون سالبًا.

اكتب أزواجًا من عوامل −١٨، على أن يكون أحد العاملين في كلّ زوج سالبًا والآخر موجبًا، ثم انظر إلى العاملين اللذين مجموعهما −٧.

عوامل العدد −١٨	مجموع العاملين
١، −١٨	−١٧
٢، −٩	−٧
−٦، +٣	−٣

العاملان الصحيحان هما ٢، −٩

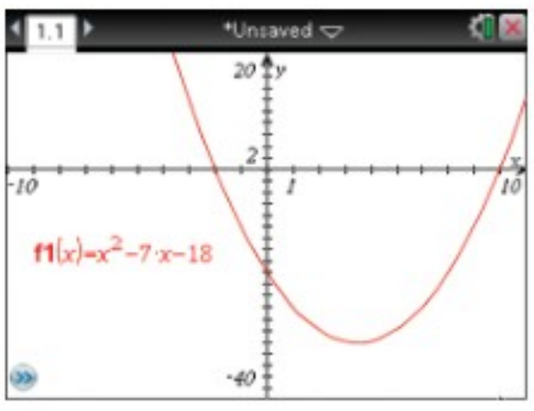
س^{٢} − ٧س − ١٨ = (س + م)(س + ن) — اكتب القاعدة

= (س + ٢)(س − ٩) — م = ٢، ن = −٩

تحقق: مثّل المعادلتين ص = س^{٢} − ٧س − ١٨ ،

ص = (س + ٢) (س − ٩) بيانيًّا على الشاشة نفسها،

بما أن التمثيلين متطابقان، فإن ثلاثية الحدود حُلّلت بصورة صحيحة. ✓



تحقق من فهمك

٣أ) ص^{٢} + ١٣ص − ٤٨

٣ب) ر^{٢} − ٢ ر − ٢٤

حلّ المعادلات بالتحليل: يمكن كتابة **المعادلات التربيعية** على الصورة القياسية:

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠ ويمكن حل بعض المعادلات على هذه الصورة بالتحليل، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٤ حل المعادلة بالتحليل

حل المعادلة: $س^{٢} + ٦س = ٢٧$، وتحقَّق من صحة الحل.

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$	المعادلة الأصلية
$س^{٢} + ٦س - ٢٧ = ٠$	اطرح ٢٧ من كلا الطرفين
$(س - ٣)(س + ٩) = ٠$	حلِّل إلى العوامل
$س - ٣ = ٠$ أو $س + ٩ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$س = ٣$ $\quad$ $س = -٩$	حل كل معادلة

تحقق: عوّض عن س بكل من ٣، -٩ في المعادلة الأصلية.

$س^{٢} + ٦س = ٢٧$	$س^{٢} + ٦س = ٢٧$
$(٣)^{٢} + ٦(٣) \stackrel{؟}{=} ٢٧$	$(-٩)^{٢} + ٦(-٩) \stackrel{؟}{=} ٢٧$
$٩ + ١٨ = ٢٧$ ✓	$٨١ - ٥٤ = ٢٧$ ✓

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٤أ) $ع^{٢} - ٣ع = ٧٠$ **٤ب)** $س^{٢} + ٣س - ١٨ = ٠$

مثال ٥ من واقع الحياة حل المسألة بالتحليل

تصميم: يصمّم سعيد لوحة إعلان لبيع أقراص مدمجة لتعلم الرياضيات. إذا كان ارتفاع الجزء العلوي من اللوحة ٤ بوصات، ويزيد طول باقي اللوحة عن عرضها بِـ ٢ بوصة. وَمساحة اللوحة ٦١٦ بوصة مربّعة، فأوجد عرض اللوحة.

افهم: يجب إيجاد عرض اللوحة.

خطّط: بما أن اللوحة على شكل مستطيل فالمساحة = العرض× الطول

حلّ: بما أن ض = عرض اللوحة، فيكون طول اللوحة = ض+ ٢ + ٤ = ض+ ٦

$ض(ض + ٦) = ٦١٦$	اكتب المعادلة
$ض^{٢} + ٦ض = ٦١٦$	اضرب
$ض^{٢} + ٦ض - ٦١٦ = ٠$	اطرح ٦١٦ من كل طرف
$(ض + ٢٨)(ض - ٢٢) = ٠$	حلل
$ض + ٢٨ = ٠$ أو $ض - ٢٢ = ٠$	خاصية الضّرب الصفري
$ض = -٢٨$ $\quad$ $ض = ٢٢$	حل كل معادلة

بما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن العرض = ٢٢ بوصة.

تحقق: إذا كان العرض ٢٢ بوصة فإن المساحة = $٢٢(٢٢ + ٦) = ٦١٦$ بوصة مربعة، وهي مساحة اللوحة. ✓

الربط مع الحياة

تُصمَّم بعض اللوحات الإعلانية لاستخدامها مرة واحدة لمناسبة معينة، وإن كان الغرض من اللوحة الاستخدام لفترة طويلة، فيجب مراعاة المواد المصنوعة منها لتقاوم عوامل الجو.

تحقق من فهمك

٥) هندسة: متوازي أضلاع ارتفاعه أقل من قاعدته بِـ ١٨ سم، ومساحته ١٧٥ سم^{٢}. فما ارتفاعه؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١) $س^{٢}+١٤س+٢٤$ ٢) $ص^{٢}-٧ص-٣٠$

٣) $ن^{٢}+٤ن-٢١$ ٤) $م^{٢}-١٥م+٥٠$

مثال ٤ حُلَّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٥) $س^{٢}-٤س-٢١=٠$ ٦) $ن^{٢}-٣ن+٢=٠$ ٧) $س^{٢}-١٥س+٥٤=٠$

٨) $س^{٢}+١٢س=-٣٢$ ٩) $س^{٢}-س-٧٢=٠$ ١٠) $س^{٢}-١٠س=-٢٤$

مثال ٥ ١١) **إطار صورة:** اشترت لطيفة إطارًا لصورة، إلا أن الصورة كانت أكبر من الإطار، لذا فإنها بحاجة إلى تصغير طول الصورة وعرضها بالمقدار نفسه، على أن تصبح مساحتها نصف مساحتها الأصلية. فإذا كان بُعدا الصورة الأصلية ١٢، ١٦ سم. فما بُعدا الصورة المصغَّرة؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١٢) $س^{٢}+١٧س+٤٢$ ١٣) $ص^{٢}-١٧ص+٧٢$ ١٤) $أ^{٢}+٨أ-٤٨$

١٥) $ن^{٢}-٢ن-٣٥$ ١٦) $٤٤+١٥هـ+هـ^{٢}$ ١٧) $٤٠-٢٢س+س^{٢}$

مثال ٤ حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٨) $س^{٢}-٧س+١٢=٠$ ١٩) $ص^{٢}+ص=٢٠$ ٢٠) $س^{٢}-٦س=٢٧$

٢١) $جـ^{٢}+١٠جـ+٩=٠$ ٢٢) $ن^{٢}-١٢٠=٧ن$ ٢٣) $هـ^{٢}+٤٨=١٦هـ$

مثال ٥ ٢٤) **هندسة:** مساحة مثلث ٣٦سم^{٢}، ويزيد ارتفاعه ٦سم على طول قاعدته. فما ارتفاعه؟ وما طول قاعدته؟

٢٥) **هندسة:** تمثّل العبارة $(س^{٢}-٤س-١٢)$ سم^{٢} مساحة مستطيل طوله $(س+٢)$ سم. فما عرضه؟

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

٢٦) $ك^{٢}+١١ك ر+١٨ر^{٢}$ ٢٧) $س^{٢}-٦س ص+٥ص^{٢}$ ٢٨) $أ^{٢}+١٠أب-٣٩ب^{٢}$

٢٩) **سباحة:** يزيد طول حوض سباحة دولي مستطيل الشكل ٢٩ مترًا عن عرضه، ومساحة سطحه ١٠٥٠ م^{٢}.

أ) عرّف متغيرًا، واكتب معادلة تمثل مساحة سطحه.

ب) حل المعادلة.

جـ) فسّر الإجابتين، وهل هناك معنى لكلٍّ منهما؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٣٠) **هندسة:** اكتب عبارة تمثّل محيط المستطيل الذي مساحته م = س^{٢} + ١٣س − ٩٠ .

٣١) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذا السؤال، طريقة التحليل عندما يكون المعامل الرئيس للعبارة التربيعية لا يساوي ١ .

أ) جدوليًا: انقل الجدول الآتي، ثمّ أكمله:

ضرب ثنائيتي حد	ناتج ضرب ثنائيتي الحد باستعمال طريقة التوزيع بالترتيب	أ س^{٢} + ب س + جـ	م × ن	أ × جـ
(٢ س+٣) (س+٤)	٢س٢+٨س+٣س+١٢	٢س٢+١١س+١٢	٢٤	٢٤
(س+١) (٣س+٥)				
(٢س−١) (٤س+١)				
(٣س+٥) (٤س−٢)				

ب) تحليليًا: كيف يرتبط العددان م، ن بالعددين أ ، جـ؟

جـ) تحليليًا: كيف يرتبط العددان م، ن بالعدد ب؟

د) لفظيًا: صف إجراءً يمكن استعماله لتحليل كثيرة حدود على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ .

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٢) **اكتشف الخطأ:** حلّل كلٌّ من خليل وماجد العبارة: س^{٢} + ٦س − ١٦ . فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

ماجد
س^{٢} + ٦س − ١٦ = (س + ٢) (س − ٨)

خليل
س^{٢} + ٦س − ١٦ = (س − ٢) (س + ٨)

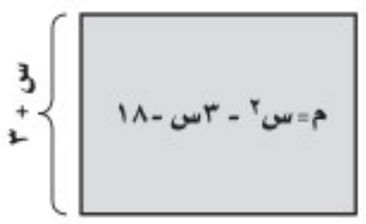
تحدَّ: أوجد جميع قيم هـ التي تجعل كل كثيرة حدود في كلّ مما يأتي قابلة للتحليل باستعمال الأعداد الصحيحة:

٣٣) س^{٢} + هـ س − ١٩ ٣٤) س^{٢} + هـ س + ١٤ ٣٥) س^{٢} − ٨ س + هـ ، هـ > ٠

٣٦) **تحدَّ:** حلّل العبارة: (٤ص − ٥)^{٢} + ٣(٤ص − ٥) − ٧٠.

تدريب على اختبار

٣٧) **هندسة:** ما العبارة التي تمثّل طول المستطيل في الشكل المجاور؟



أ) س + ٥ جـ) س − ٦

ب) س + ٦ د) س − ٥

٣٨) إذا كان الفرق بين ٢١ والعدد ن هو ٦، فما المعادلة التي تبين هذه العلاقة؟

أ) ٢١ − ن = ٦ جـ) ٢١ + ن = ٦

ب) ٢١ن = ٦ د) ٦ن = −٢١

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

حلّل كلَّ كثيرة حدودٍ ممَّا يأتي: (الدرس ٧ - ٢)

٣٩) ٢م ل^{٣} - ١٦م ل^{٢} + ٨ م ل

٤٠) ٢أ س + ٦س جـ + ب أ + ٣ب جـ

٤١) س^{٢} - س ص - س ص + ص^{٢}

٤٢) **تبليط:** يريد خالد تبليط غرفة معيشة بُعداها ٤٢٠ سم ، ٣٣٠ سم، ولديه قطع بلاط أبعادها ٢٠ سم × ٢٠ سم ، ٣٠ سم × ٣٠ سم ، ٢٠ سم × ١٥ سم ، ٢٢ سم × ٣٠ سم. فأيّ الأنواع يمكنه استعمالها دون قص أي قطعة؟ فسّر إجابتك. (الدرس ٧-١)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلل كلَّ كثيرة حدودٍ مما يأتي:

٤٣) ٦م س - ٤م + ٣ر س - ٢ر

٤٤) ٣أس - ٦ ب س + ٨ ب - ٤ أ

٤٥) ٢ د^{٢} جـ + ٢ ف جـ + ٤ د^{٢} هـ + ٤ ف هـ

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

اختبار منتصف الفصل

الدروس ٧-١ إلى ٧-٣

حلّل كل وحيدة حدٍّ فيما يأتي تحليلًا تامًّا: (الدرس ٧-١)

١) ١٦س^{٣} ص^{٢}

٢) ٣٥ب جـ^{٤}

٣) −٢٠م^{٥}ن^{٢}

٤) −١٣س ص^{٣}

٥) **مساحة ممرٍّ:** تبلغ مساحة ممرٍّ ١٢م^{٢}، أوجد جميع أزواج الأعداد الكلية التي يمكن أن تمثل طولًا وعرضًا للممرِّ. (الدرس ٧-١)

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حدٍّ فيما يأتي:

٦) ١٠ب، ٢٠ب^{٢}، ٢٥ب

٧) ١٣جـ، ٢٥د

٨) ٢١ب جـ، ٣٥ب، ٥٦ب جـ^{٣}

٩) **ترتيبٌ:** يريد عامل ترتيب ٢٤ زوجًا من الأحذية على أرفف محلٍّ، بحيث يضع نفس عدد الأزواج على كل رفٍّ، ويضع على الأقل ٤ أزواج على كل رفٍّ، ويستخدم رفين على الأقل، اذكر عدد الأزواج الممكنة على كل رفٍّ، وعدد الأرفف. (الدرس ٧-١)

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرات الحدود التالية: (الدرس ٧-٢)

١٠) ٣س ص − ٩س

١١) ٦ب جـ + ١٢ب جـ^{٢} + ١٨جـ

١٢) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه تساوي ٣س^{٢} + ٦س − ١٢ وحدةً مربعةً، فكم وحدةً عرضه؟ (الدرس ٧-٢)

أ) وحدتان
ب) ٣ وحداتٍ
جـ) ٤ وحداتٍ
د) ٦ وحدات

حلّل كلَّ كثيرة حدودٍ ممَّا يأتي: (الدرس ٧-٢)

١٣) ٥هـ + ٤٠جـ

١٤) ٣س^{٢} + ٦س + س + ٢

١٥) ٥ب^{٢} − ٢٥ب − ب + ٥

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٣)

١٦) ٢س (س − ٥) = ٠

١٧) ٦ب^{٢} − ٣ب = ٠

١٨) جـ^{٢} = ١٥جـ

حلّل كلَّ كثيرة حدودٍ ممَّا يأتي: (الدرس ٧-٣)

١٩) س^{٢} − ٤س − ٢١

٢٠) س^{٢} − ١٠س + ٢٤

٢١) س^{٢} + ٤س − ٢١

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٣)

٢٢) س^{٢} − ٥س = ١٤

٢٣) س^{٢} − ٣س − ١٨ = ٠

٢٤) ٢٤ + س^{٢} = ١٠س

٢٥) **اختيار من متعدد:** يزيد طول مستطيل على عرضه بمقدار ٢سم، فما طول المستطيل، إذا كانت مساحته ٤٨سم^{٢}؟

أ) ٤٨سم
ب) ٨سم
جـ) ٦سم
د) ٢سم

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٧-٤

المعادلات التربيعية: أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درستُ تحليل ثلاثية حدود على الصورة س^{٢} + ب س + جـ.

والآن

- أحلّل ثلاثية حدود على الصورة: أس^{٢} + ب س + جـ.
- أحلّ معادلات على الصورة: أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

المفردات

كثيرة الحدود الأولية

لماذا؟

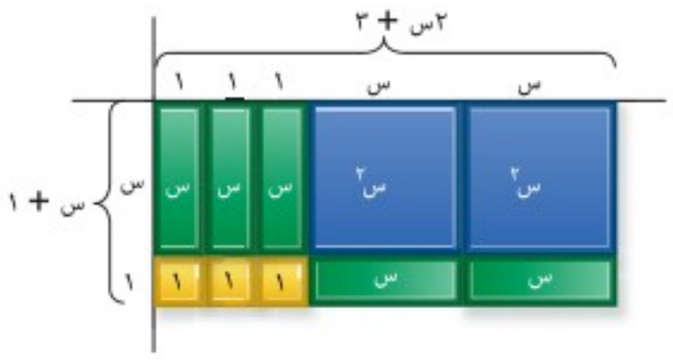
يمكن تمثيل مسار الأرجوحة في مدينة الألعاب بالعبارة ٥ن^{٢} − ٢ن + ٣٠؛ حيث (ن) زمن الحركة. وتحليل هذه العبارة إلى عواملها يساعد المسؤول عن التشغيل على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتها في المرة الأولى.

تحليل أ س^{٢} + ب س + جـ: حللت في الدرس السابق عبارات تربيعية على الصورة: أ س^{٢} + ب س + جـ، أ = ١.

ستطبق في هذا الدرس طرق تحليل عبارات تربيعية فيها أ ≠ ١.

في الشكل المجاور بعدا المستطيل المكوّن من بطاقات الجبر هما (س + ١)، (٢س + ٣)، وهما عاملا ٢س^{٢} + ٥س + ٣.

يمكنك استعمال طريقة التحليل بتجميع الحدود لتحليل هذه العبارة.



الخطوة ١: طبّق القاعدة:

٢س^{٢} + ٥س + ٣ = ٢س^{٢} + م س + ن س + ٣.

الخطوة ٢: أوجد عددين ناتج ضربهما ٢ × ٣ = ٦ ومجموعهما ٥.

عوامل العدد ٦	مجموع العاملين
١، ٦	٧
٢، ٣	٥

الخطوة ٣: استعمل التجميع لإيجاد العوامل.

٢س^{٢} + ٥س + ٣ = ٢س^{٢} + م س + ن س + ٣ — اكتب القاعدة

= ٢س^{٢} + ٢س + ٣س + ٣ — م = ٢، ن = ٣

= (٢س^{٢} + ٢س) + (٣س + ٣) — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

= ٢س(س + ١) + ٣(س + ١) — حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

= (٢س + ٣)(س + ١) — (س+١) عامل مشترك

إذن: ٢س^{٢} + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١).

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

تحليل أ س^{٢} + ب س + جـ

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة أ س^{٢} + ب س + جـ، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما يساوي ب، وناتج ضربهما أ جـ، ثم اكتب أ س^{٢} + ب س + جـ على الصورة أ س^{٢} + م س + ن س + جـ، ثم حلّل بتجميع الحدود.

مثال: ٥س^{٢} − ١٣س + ٦ = ٥س^{٢} − ١٠س − ٣س + ٦

= ٥س(س − ٢) + (−٣)(س − ٢)

= (٥س − ٣)(س − ٢)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ١ تحليل أس^{٢} + ب س + جـ

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

أ) ٧س^{٢} + ٢٩س + ٤

في ثلاثية الحدود أعلاه، أ = ٧، ب = ٢٩، جـ = ٤. أوجد عددين ناتج ضربهما ٧ × ٤ = ٢٨، ومجموعهما ٢٩. كوّن قائمة بأزواج من عوامل العدد ٢٨، وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما ٢٩.

عوامل العدد ٢٨	مجموع العوامل
١، ٢٨	٢٩

العوامل الصحيحة ١ ، ٢٨

٧س^{٢} + ٢٩س + ٤ = ٧س^{٢} + م س + ن س + ٤ — استخدم القاعدة.

= ٧س^{٢} + ١ س + ٢٨س + ٤ — م = ١، ن = ٢٨

= (٧س^{٢} + ١س) + (٢٨س + ٤) — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

= س(٧س + ١) + ٤(٧س + ١) — حلّل بإخراج (ق. م. أ)

= (س + ٤)(٧س + ١) — (٧س+١) عامل مشترك

ب) ٣س^{٢} + ١٥س + ١٨

(ق.م.أ) للحدود ٣س^{٢}، ١٥س، ١٨، هو ٣. حلّل بإخراج العامل ٣.

٣س^{٢} + ١٥س + ١٨ = ٣(س^{٢} + ٥س + ٦) — خاصية التوزيع

= ٣(س + ٣)(س + ٢) — أوجد عاملين للعدد ٦ مجموعهما ٥

تحقق من فهمك

١أ) ٥س^{٢} + ١٣س + ٦ **١ب)** ٦س^{٢} + ٢٢س − ٨

مثال ٢ تحليل أ س٢ - ب س + جـ

حلل كثيرة الحدود ٣س^{٢} − ١٧س + ٢٠.

في ثلاثية الحدود أعلاه أ = ٣، ب = −١٧، جـ = ٢٠. وبما أن ب سالبة، فإن م + ن ستكون سالبة أيضًا، وبما أن جـ موجبة، فإن م ن ستكون موجبة.

لتحديد م، ن كوّن قائمة بالعوامل السالبة لـ أ جـ = ٦٠ وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما −١٧

عوامل العدد ٦٠	مجموع العاملين
−٢، −٣٠	−٣٢
−٣، −٢٠	−٢٣
−٤، −١٥	−١٩
−٥، −١٢	−١٧

العاملان الصحيحان هما −٥، −١٢

٣س^{٢} − ١٧س + ٢٠ = ٣س^{٢} − ١٢س − ٥س + ٢٠ — م = −١٢، ن = −٥

= (٣س^{٢} − ١٢س) + (−٥س + ٢٠) — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

= ٣س(س − ٤) + (−٥)(س − ٤) — حلل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

= (٣س − ٥)(س − ٤) — خاصية التوزيع

تحقق من فهمك

٢أ) ٢ن^{٢} − ن − ١ **٢ب)** ١٠ص^{٢} − ٣٥ص + ٣٠

إرشادات للدراسة

القاسم المشترك الأكبر

ابحث عن القاسم المشترك الأكبر لحدود كثيرة الحدود قبل تحليلها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تُسمّى كثيرة الحدود التي لا يمكن كتابتها على صورة ناتج ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة **كثيرة حدود أولية.**

مثال ٣ تحديد كثيرة الحدود الأولية

حلّل العبارة: ٤س^{٢}−٣س+ ٥ إن أمكن باستعمال الأعداد الصحيحة، وإن لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب"أولية".

في ثلاثية الحدود السابقة أ = ٤، ب = −٣، جـ = ٥

وبما أن ب سالبة، فإن م + ن سالبة. وبما أن جـ موجبة فإن م ن موجبة، لذا يكون كلّ من م وَ ن سالبًا. كوّن قائمة بأزواج عوامل العدد٢٠ . وابحث عن العاملين اللذين مجموعهما −٣.

عوامل العدد ٢٠	مجموع العاملين
−٢٠، −١	−٢١
−٤، −٥	−٩
−٢، −١٠	−١٢

لا يوجد عاملان مجموعهما −٣. لذا لا يمكن تحليل العبارة التربيعية باستعمال الأعداد الصحيحة. لذا فالعبارة التربيعية ٤س^{٢}−٣س + ٥ أولية.

تحقق من فهمك

٣أ) ٤ر^{٢} − ر + ٧ **٣ب)** ٢س^{٢} + ٣س − ٥

الربط مع الحياة

الفهد هو أسرع حيوان في العالم؛ حيث تبلغ سرعته ١١٢ كلم / ساعة، ويمكن أن تصل سرعته من صفر إلى ٦٤ كلم / ساعة في ٣ خطوات واسعة خلال ثوانٍ فقط.

حل معادلات بالتحليل: تمثّل المعادلة ل = −٥ن^{٢} + ع ن + ل. ارتفاع جسم مقذوف لأعلى، حيث تمثل (ل) الارتفاع بالمتر، وَ (ن) الزمن بالثواني، وَ (ع) السرعة الابتدائية م/ ثانية، و(ل.) الارتفاع الابتدائي بالمتر. ويمكن حل هذه المعادلة بعد كتابتها على الصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ بالتحليل واستعمال خاصية الضرب الصفري.

مثال ٤ من واقع الحياة حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

حياة برية: **افترض أن فهدًا يقفز نحو فريسته بسرعة ابتدائية رأسية مقدارها ١١ مترًا/ ثانية. فكم يبقى الفهد في الهواء قبل وصوله إلى فريسته التي ترتفع عن الأرض ٢ متر؟**

ل = −٥ن^{٢} + ع ن + ل.	معادلة الارتفاع
٢ = −٥ن^{٢} + ١١ن + ٠	عوّض ل = ٢، ع = ١١، ل. = ٠
٠ = −٥ن^{٢} + ١١ن − ٢	اطرح ٢ من كلا الطرفين
٠ = ٥ن^{٢} − ١١ن + ٢	اضرب كلا الطرفين في −١
٠ = (٥ن − ١) (ن − ٢)	حلّل
٥ن − ١ = ٠ أو ن = ٢	خاصية الضرب الصفري
٥ن = ١	حل كل معادلة
ن = $\frac{١}{٥}$	

الإجابتان $\frac{١}{٥}$ وَ ٢ ثانية، يحتاج الفهد إلى $\frac{١}{٥}$ ثانية للوصول إلى ارتفاع ٢م في أثناء صعوده، وإلى ثانيتين في الهواء للوصول إلى الفريسة.

تنبيه !

إشارة السالب

حافظ على (العدد −١) معامل ن^{٢} ، الذي تم إخراجه خلال التحليل، أو اضرب كلا الطرفين في −١ بدلًا من ذلك.

تحقق من فهمك

٤) فيزياء: قذف شخص كرة إلى الأعلى من سطح بناية ارتفاعها ٢٠ م. والمعادلة ع = −٥ن^{٢} + ١٦ن+٢٠ تمثل ارتفاع الكرة (ع) بالأمتار بعد (ن) ثانية. فإذا سقطت الكرة على شرفة ارتفاعها ٤ م عن الأرض، فكم ثانية بقيت الكرة في الهواء؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

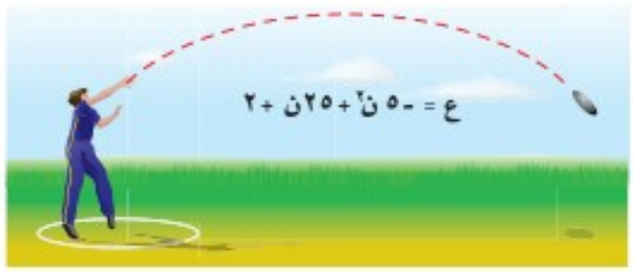
الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

١) $٢س^{٢} + ٢٢س + ٥٦$ ٢) $٥س^{٢} - ٣س + ٤$ ٣) $٣س^{٢} - ١١س - ٢٠$

مثال ٤ حُلَّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٤) $٢س^{٢} + ٩س + ٩ = ٠$ ٥) $٣س^{٢} - ١٠س + ٨ = ٠$ ٦) $٢س^{٢} - ١٧س + ٣٠ = ٠$

٧) **رمي القرص:** يرمي خالد القرص المعدني كما في الشكل المجاور.



أ) ما الارتفاع الابتدائي للقرص؟

ب) بعد كم ثانية يصل القرص إلى الارتفاع نفسه الذي قذف منه؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

٨) $٥س^{٢} + ٣٤س + ٢٤$ ٩) $٤س^{٢} + ٣٨س + ٧٠$ ١٠) $٢س^{٢} - ٣س - ٩$

١١) $٤س^{٢} - ١٣س + ١٠$ ١٢) $٢س^{٢} + ٣س + ٦$ ١٣) $١٢س^{٢} + ٦٩س + ٤٥$

١٤) $٤س^{٢} - ٥س + ٧$ ١٥) $٥س^{٢} + ٢٣س + ٢٤$ ١٦) $٣س^{٢} - ٨س + ١٥$

مثال ٤ ١٧) **صيد:** أطلق صياد طلقة نارية ارتفاعها تمثِّله المعادلة $ع = -٥ن^{٢} + ٩ن + ٢$. بعد كم ثانية تصل الطلقة إلى الأرض؟

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٨) $٢س^{٢} + ٩س - ١٨ = ٠$ ١٩) $٤س^{٢} + ١٧س + ١٥ = ٠$ ٢٠) $-٣س^{٢} + ٢٦س = ١٦$

٢١) $-٢س^{٢} + ١٣س = ١٥$ ٢٢) $-٣س^{٢} + ٥س = -٢$ ٢٣) $-٤س^{٢} + ١٩س = -٣٠$

٢٤) **نظرية الأعداد:** ستة أمثال مربّع العدد س مضافًا إليها ١١ مِثْلًا للعدد يساوي ٢. ما القيم الممكنة لـ س؟

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية":

٢٥) $-٦س^{٢} - ٢٣س - ٢٠$ ٢٦) $-٤س^{٢} - ١٥س - ١٤$ ٢٧) $-٥س^{٢} + ٢٨س + ٨$

٢٨) $-٦س^{٢} + ٣١س - ٣٥$ ٢٩) $-٤س^{٢} + ٥س - ١٢$ ٣٠) $-١٢س^{٢} + س + ٦$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الربط مع الحياة

هيَّأت أمانة منطقة الرياض ٣٦٢ مشروعًا بيئيًّا وترفيهيًّا موزَّعة على مختلف أحياء مدينة الرياض على مساحة تتجاوز نصف مليار متر مربع.

٣١) **تخطيط:** خططت بلدية إحدى المدن لبناء متنزّه جديد مستطيل الشكل، يمكن التعبير عن مساحته بالعبارة: ٦٦٠س^{٢} + ٥٢٤س+ ٨٥. حلّل هذه العبارة لإيجاد ثنائيتي حدّ بمعاملات أعداد صحيحة تمثّل البعدين الممكنين للمتنزّه. وإذا كانت س = ٨، فما محيط المتنزّه؟

٣٢) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة. تحليل أنواعٍ خاصة من كثيرات الحدود.

أ) هندسيًّا: ارسم مربّعًا طول ضلعه أ. ثم ارسم داخله مربعًا أصغر يشترك معه في أحد الرؤوس، طول ضلعه ب. ما مساحة كل من المربعين؟

ب) هندسيًّا: قصَّ المربع الصغير. ما مساحة المنطقة الباقية؟

جـ) تحليليًّا: ارسم خطًّا قطريًّا بين رأس المربع الكبير ورأس المربع الصغير في الشكل المتبقي. وقصّ على طول هذا الخط للحصول على قطعتين متطابقتين، ثم أعد ترتيب القطعتين لتشكّلا مستطيلاً. ما بُعدا المستطيل الناتج؟

د) تحليليًّا: اكتب مساحة المستطيل على صورة ناتج ضرب ثنائيتي حد.

هـ) لفظيًّا: أكمل العبارة أ^{٢} – ب^{٢} = ... لماذا هذه العبارة صحيحة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٣) **اكتشف الخطأ:** حلّ كلّ من زكريا وسامي المعادلة ٦س^{٢} – س = ١٢. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

زكريا

٦س^{٢} – س = ١٢

٦س^{٢} – س – ١٢ = ٠

(٢س – ٣)(٣س + ٤) = ٠

٢س – ٣ = ٠ أو ٣س + ٤ = ٠

س = $\frac{٣}{٢}$ أو س = $-\frac{٤}{٣}$

سامي

٦س^{٢} – س = ١٢

س(٦س – ١) = ١٢

س = ١٢ أو ٦س – ١ = ١٢

٦س = ١٣ أو س = $\frac{١٣}{٦}$

٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية معاملات حدودها أعداد صحيحة على أن يكون: $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٥}$ حلين لها. فسّر ذلك.

٣٥) **اكتب:** فسّر كيف تحدد القيم التي يجب اختيارها لِـ م وَ ن عند تحليل كثيرة الحدود على الصورة أس^{٢}+ ب س+جـ

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدريب على اختبار

٣٦) **إجابة قصيرة:** لدى سلمى أختان: إحداهما أكبر منها بـ٨سنوات، والأخرى أصغر منها بسنتين، وناتج ضرب عمري أختيها ٥٦. فكم سنة عمر سلمى؟

٣٧) ما مجموعة حل المعادلة س^{٢}+٢س−٢٤=٠؟

أ) {−٤، ٦}　　جـ) {−٣، ٨}

ب) {٣، −٨}　　د) {٤، −٦}

مراجعة تراكمية

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي: (الدرس ٧-٣)

٣٨) س^{٢} − ٩س + ١٤　　٣٩) س^{٢} − ٥س − ٢٤　　٤٠) ع^{٢} + ١٥ع + ٣٦

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٧-٢)

٤١) أ(أ − ٩) = ٠　　٤٢) (٢ص + ٦)(ص − ١) = ٠　　٤٣) ١٠س^{٢} − ٢٠س = ٠

٤٤) حلّ المتباينة المركبة ك + ٢ >١٢ وَ ك + ٢ ≥ ١٨ ، ثم مثّل مجموعة الحل على خط الأعداد. (الدرس ٤-٤)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي:

٤٥) $\sqrt{١٦}$　　٤٦) $\sqrt{٦٤}$　　٤٧) $\sqrt{١٢١}$　　٤٨) $\sqrt{١٠٠}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٧-٥

المعادلات التربيعية: الفرق بين مربعين

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا؟

يستعمل مصمِّمو الجرافيك الفن والرياضيات لتصميم صور وأشرطة فيديو. ويستعملون المعادلات لتكوين أشكال وخطوط على الحاسوب. ويساعد التحليل إلى العوامل على تحديد أبعاد الأشكال وطريقة ظهورها.

تحليل الفرق بين مربعين: تذكّر أنك تعلمت ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما، ويشير ناتج الضرب هذا إلى **الفرق بين المربعين**. لذا فالصورة المحلّلة للفرق بين مربعين تسمى ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

فيما سبق

درست تحليل ثلاثية حدود إلى ثنائيتي حد.

والآن

- أحلّل ثنائية حدّ على صورة فرق بين مربعين.
- أحل معادلات باستعمال الفرق بين مربعين.

المفردات

الفرق بين مربعين

مفهوم أساسي — الفرق بين مربعين

أضف إلى مطويتك

الرموز: $أ^٢ - ب^٢ = (أ + ب)(أ - ب)$ أو $(أ - ب)(أ + ب)$

أمثلة: $س^٢ - ٢٥ = (س + ٥)(س - ٥)$ أو $(س - ٥)(س + ٥)$

$ن^٢ - ٦٤ = (ن + ٨)(ن - ٨)$ أو $(ن - ٨)(ن + ٨)$

مثال ١ — تحليل الفرق بين مربعين

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $١٦هـ^٢ - ٩أ^٢$

$١٦هـ^٢ - ٩أ^٢ = (٤هـ)^٢ - (٣أ)^٢$ — اكتب العبارة على صورة $أ^٢ - ب^٢$

$= (٤هـ + ٣أ)(٤هـ - ٣أ)$ — تحليل الفرق بين مربعين

ب) $١٢١ - ٤ب^٢$

$١٢١ - ٤ب^٢ = (١١)^٢ - (٢ب)^٢$ — اكتب العبارة على صورة $أ^٢ - ب^٢$

$= (١١ - ٢ب)(١١ + ٢ب)$ — تحليل الفرق بين مربعين

جـ) $٢٧جـ^٣ - ٣جـ$

بما أنه يوجد عامل مشترك بين الحدود، لذا حلّل بإخراج (ق .م .أ) أولاً، ثم أكمل بطرق التحليل الأخرى.

$٢٧جـ^٣ - ٣جـ = ٣جـ(٩جـ^٢ - ١)$ — حلّل بإخراج (ق .م .أ)

$= ٣جـ[(٣جـ)^٢ - (١)^٢]$ — اكتب على الصورة $أ^٢ - ب^٢$

$= ٣جـ(٣جـ - ١)(٣جـ + ١)$ — تحليل الفرق بين مربعين.

تحقق من فهمك

١أ) $٨١ - جـ^٢$

١ب) $٦٤جـ^٢ - هـ^٢$

١جـ) $٩س^٣ - ٤س$

١د) $-٤ص^٣ + ٩ص$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

قد تحتاج إلى تحليل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا، باستعمال التحليل أكثر من مرة. وهذا ينطبق أيضًا على الفرق بين مربعين.

تنبيه !

مجموع مربعين:
لا يمكن تحليل مجموع المربعين $أ^٢ + ب^٢$ إلى $(أ+ب)(أ+ب)$. فمجموع المربعين هو كثيرة حدود أولية لا يمكن تحليلها.

مثال ٢ تطبيق التحليل أكثر من مرة

حلل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $ب^٤ - ١٦$

$ب^٤ - ١٦ = (ب^٢)^٢ - (٤)^٢$ — اكتب $ب^٤ - ١٦$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٤)$ — تحليل الفرق بين مربعين

لاحظ أن العامل $ب^٢ - ٤$ هو فرق بين مربعين أيضًا.

$= (ب^٢ + ٤)(ب^٢ - ٢^٢)$ — اكتب $ب^٢ - ٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= (ب^٢ + ٤)(ب + ٢)(ب - ٢)$ — تحليل الفرق بين مربعين

ب) $٦٢٥ - س^٤$

$٦٢٥ - س^٤ = (٢٥)^٢ - (س^٢)^٢$ — اكتب $٦٢٥ - س^٤$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= (٢٥ + س^٢)(٢٥ - س^٢)$ — تحليل الفرق بين مربعين

$= (٢٥ + س^٢)(٥^٢ - س^٢)$ — اكتب $٢٥ - س^٢$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= (٢٥ + س^٢)(٥ - س)(٥ + س)$ — تحليل الفرق بين مربعين

تحقق من فهمك

٢أ) $ص^٤ - ١$ **٢ب)** $٤أ^٤ - ب^٤$ **٢جـ)** $٨١ - س^٤$

وتطبق أحيانًا أكثر من طريقة لتحليل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا.

مثال ٣ تطبيق طرق مختلفة

حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

أ) $٥س^٥ - ٤٥س$

$٥س^٥ - ٤٥س = ٥س(س^٤ - ٩)$ — حلل بإخراج (ق. م .أ)

$= ٥س[(س^٢)^٢ - (٣)^٢]$ — اكتب $س^٤ - ٩$ على صورة $أ^٢ - ب^٢$.

$= ٥س(س^٢ - ٣)(س^٢ + ٣)$ — تحليل الفرق بين مربعين

لاحظ أن $س^٢ - ٣$ ليس فرقًا بين مربعين؛ لأن ٣ ليس مربعًا كاملًا.

ب) $٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$

$٧س^٣ + ٢١س^٢ - ٧س - ٢١$ — العبارة الأصلية

$= ٧(س^٣ + ٣س^٢ - س - ٣)$ — التحليل بإخراج (ق .م. أ)

$= ٧[(س^٣ + ٣س^٢) - (س + ٣)]$ — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

$= ٧[س^٢(س + ٣) - (س + ٣)]$ — حلل كل تجمّع

$= ٧(س + ٣)(س^٢ - ١)$ — $س + ٣$ عامل مشترك

$= ٧(س + ٣)(س + ١)(س - ١)$ — تحليل الفرق بين مربعين

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي:

٣أ) $٢ص^{٤}-٥٠$

٣ب) $٦س^{٤}-٩٦$

٣جـ) $٢م^{٣}+م^{٢}-٥٠م-٢٥$

٣د) $ر^{٣}+٦ر^{٢}+١١ر+٦٦$

حل معادلات بالتحليل: يمكنك بعد التحليل تطبيق خاصية الضرب الصفري على المعادلة المكتوبة على صورة ناتج ضرب عدة عوامل يساوي صفرًا.

مثال ٤ من اختبار

ما القيمة الموجبة لـ س التي تحقق المعادلة ص= $س^{٢}-\frac{٩}{١٦}$، إذا كانت ص= ٠؟

أ) $\frac{-٩}{٤}$ ب) صفر جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{٩}{٤}$

اقرأ الفقرة:

عوّض عن ص بـ صفر، ثم حل المعادلة.

حل الفقرة:

$ص=س^{٢}-\frac{٩}{١٦}$	المعادلة الأصلية
$٠=س^{٢}-\frac{٩}{١٦}$	عوّض عن ص بـ صفر
$٠=س^{٢}-(\frac{٣}{٤})^{٢}$	اكتب على صورة $أ^{٢}-ب^{٢}$
$٠=(س+\frac{٣}{٤})(س-\frac{٣}{٤})$	تحليل الفرق بين مربعين
$٠=س+\frac{٣}{٤}$ أو $٠=س-\frac{٣}{٤}$	خاصية الضرب الصفري
$س=\frac{-٣}{٤}$ $س=\frac{٣}{٤}$	الإجابة الصحيحة جـ

تحقق من فهمك

٤) حُلَّ المعادلة: $١٨س^{٣}=٥٠س$؟

أ) $٠، \frac{٥}{٣}$ ب) $\frac{-٥}{٣}، \frac{٥}{٣}$ جـ) $\frac{-٥}{٣}، ٠، \frac{٥}{٣}$ د) $\frac{-٥}{٣}، \frac{٥}{٣}، ١$

إرشادات للدراسة

استعمال طريقة أخرى

يمكن استعمال طريقة أخرى للحل بتعويض البدائل في المعادلة.

تأكد

الأمثلة ١-٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١) $س^{٢}-٩$ ٢) $٤أ^{٢}-٢٥$ ٣) $٢ل^{٣}-١٦٢ل$

٤) $و^{٤}-٨١$ ٥) $٢د^{٤}-٣٢ف^{٤}$ ٦) $٢٠ر^{٤}-٤٥ن^{٤}$

٧) $٢٥٦ن^{٤}-جـ^{٤}$ ٨) $٢جـ^{٣}+٣جـ^{٢}-٢جـ-٣$ ٩) $٣ن^{٣}+٢ن^{٢}-٤٨ن-٣٢$

مثال ٤ ١٠) **سيارات:** قد يكون الأثر الذي تتركه عجلات السيارة ناجمًا عن وقوفها المفاجئ. والمعادلة $\frac{١}{٢٤}ع^{٢}=ف$ تعبِّر عن سرعة السيارة التقريبية (ع) بالميل/ ساعة، علمًا بأن (ف) هو طول الأثر الذي تتركه العجلات بالقدم على سطح جاف. إذا كان طول أثر العجلات ٥٤ قدمًا، فكم كانت سرعة السيارة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٣ حلّل كل كثيرة حدود مما يأتي:

١١) $ل^{٢} - ١٢١$

١٢) $ر^{٤} - ك^{٤}$

١٣) $٦ن^{٤} - ٦$

١٤) $ر^{٢} - ٩ن^{٢}$

١٥) $٢جـ^{٢} - ٣٢د^{٢}$

١٦) $هـ^{٣} - ١٠٠هـ$

١٧) $هـ^{٤} - ٢٥٦$

١٨) $٢ن^{٣} - ن^{٢} - ١٦٢ن + ٨١$

١٩) $س^{٢} - ٤ص^{٢}$

٢٠) $٧هـ^{٤} - ٧ل^{٤}$

٢١) $٦ك^{٢}هـ^{٤} - ٥٤ك^{٤}$

٢٢) $٥هـ^{٣} - ٢٠هـ$

٢٣) $ف^{٣} + ٢ف^{٢} - ٦٤ف - ١٢٨$

٢٤) $٣ر^{٣} - ١٩٢ر$

٢٥) $١٠ك^{٣} - ١٢١٠ك$

٢٦) $٣س ن^{٤} - ٢٧س^{٣}$

٢٧) $ل^{٣}ر^{٥} - ل^{٣}ر$

٢٨) $٨جـ^{٣} - ٨جـ$

٢٩) $ر^{٣} - ٥ر^{٢} - ١٠٠ر + ٥٠٠$

٣٠) $٣ن^{٣} - ٧ن^{٢} - ٣ن + ٧$

٣١) $٤م^{٣} + ٩م^{٢} - ٣٦م - ٨١$

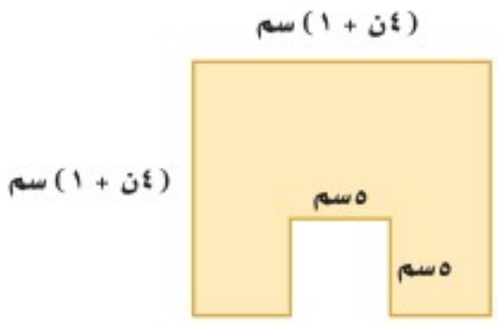
٣٢) $٣م^{٤} + ٢٤٣$

٣٣) $س^{٤} + ٦س^{٣} - ٣٦س^{٢} - ٢١٦س$

٣٤) $١٥م^{٣} + ١٢م^{٢} - ٣٧٥م - ٣٠٠$

مثال ٤

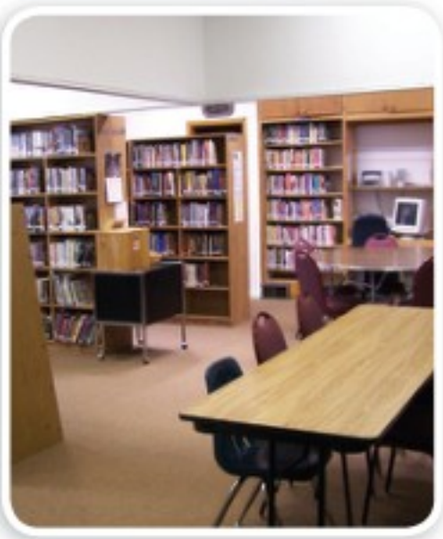
٣٥) **هندسة:** يمثّل الشكل المجاور مربعًا قُطِعَ منه مربع آخر.



أ) اكتب عبارة تمثّل مساحة المنطقة المظللة.

ب) أوجد بُعدي مستطيل له مساحة المنطقة المظللة نفسها، مفترضًا أنهما يُمثّلان بثنائيتي حد.

٣٦) **مبانٍ:** أراد زياد بناء ملحق في باحة منزله الخلفية، بُعداه ٨م ، ٨م .
ثم قرَّر تقليص طول أحد البعدين وزيادة البعد الآخر بالعدد نفسه من الأمتار. فإذا كانت مساحة الملحق بعد تقليصه تساوي ٦٠م^{٢}، فما بُعداه ؟



الربط مع الحياة

على الرغم من انتشار الإنترنت في معظم المنازل وأماكن العمل ليكون وسيلة للبحث والاطلاع، إلا أن البعض لايزال يفضل تكوين معلوماته من قراءة الكتب وارتياد المكتبات.

٣٧) **كتب:** نشرت إحدى دور النشر كتابًا جديدًا، وتمثّل المعادلة ع = $-٢٥م^{٢} + ١٢٥م$ مبيعات الكتاب، حيث (ع) تمثّل عدد النسخ المبيعة، و (م) عدد الأشهر التي بيع فيها الكتاب.

أ) في أي شهر يُتوقَّع أن تنفذ النسخ المعروضة من الكتاب؟

ب) متى وصلت المبيعات إلى ذروتها؟

جـ) ما عدد النسخ المبيعة في الذروة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إرشادات للدراسة

حل المعادلات بالتحليل

تذكّر أن تجعل أحد طرفي المعادلة صفرًا قبل حل المعادلة بالتحليل .

حل كلّ معادلة مما يأتي بالتحليل، ثمُ تحقق من صحة الحل:

٣٨) $٣٦ل^{٢} = ١٢١$

٣٩) $١٠٠ = ٢٥س^{٢}$

٤٠) $٤ص^{٢} - \frac{٩}{١٦} = ٠$

٤١) $\frac{١}{٤}ب^{٢} = ١٦$

٤٢) $٨١ - \frac{١}{٢٥}س^{٢} = ٠$

٤٣) $٩د^{٢} - ٨١ = ٠$

٤٤) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة ثلاثية الحدود التي تمثّل مربعًا كاملاً.

أ) جدوليًا: انسخ الجدول أدناه وأكمله بتحليل كل ثلاثية حدود، ثم اكتب أول وآخر حد في كثيرة الحدود على صورة مربعات كاملة.

كثيرة الحدود	تحليل كثيرة الحدود	الحد الأول	الحد الأخير	الحد الأوسط
$٤س^{٢}+١٢س+٩$	$(٢س+٣)(٢س+٣)$	$٤س^{٢}=(٢س)^{٢}$	$٣^{٢}=٩$	
$٩س^{٢}-٢٤س+١٦$				
$٤س^{٢}-٢٠س+٢٥$				
$١٦س^{٢}+٢٤س+٩$				

ب) تحليليًا: اكتب الحد الأوسط في كل كثيرة حدود باستعمال الجذور التربيعية للمربعات الكاملة للحدين الأول والأخير.

جـ) جبريًا: اكتب قاعدة لثلاثية الحدود التي تمثّل مربعًا كاملاً.

د) لفظيًا ما الشروط الواجب توافرها في ثلاثية حدود لتصنَّف على أنها مربع كامل؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٥) **اكتشف الخطأ:** حلَّلت كلٌّ من هلا ومنى العبارة الآتية، فأيهما إجابتها صحيحة؟ فسِّر ذلك.

هلا

$١٦س^{٤} - ٢٥ص^{٢} =$
$(٤س - ٥ص)(٤س + ٥ص)$

منى

$١٦س^{٤} - ٢٥ص^{٢} =$
$(٤س^{٢} - ٥ص)(٤س^{٢} + ٥ص)$

٤٦) **تحدٍّ:** بسِّط العبارة: $٩ - (ك+٣)^{٢}$ بتحليلها بالفرق بين مربعين.

٤٧) **تحدٍّ:** حلّل: $س^{١٦} - ٨١$

٤٨) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. وأعطِ مثالاً مضادًّا للتحقق من إجابتك: "أي ثنائية حد جميع حدودها مربعات كاملة قابلة للتحليل".

٤٩) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا لثنائية حد نحتاج عند تحليلها تحليلاً تامًّا إلى تكرار قاعدة الفرق بين مربعين، ثم حلّلها.

٥٠) **اكتب:** لماذا لا تتضمن قاعدة الفرق بين مربعين حدًّا متغيرًا في الوسط؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدريب على اختبار

٥١) إذا كان أحد جذري المعادلة $٢س^{٢}+١٣س=٢٤$ هو -٨ فما الجذر الآخر؟

أ) $-\frac{٣}{٢}$ ج) $-\frac{٢}{٣}$

ب) $\frac{٣}{٢}$ د) $-\frac{٢}{٣}$

٥٢) أي ممّا يأتي يمثّل مجموع حليّ المعادلة $س^{٢}+٣س=٥٤$؟

أ) -٣ ج) ٣

ب) -٢١ د) ٢١

مراجعة تراكمية

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي، وإذا لم يمكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة، فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٤)

٥٣) $٥س^{٢}-١٧س+١٤$ **٥٤)** $٥أ^{٢}-٣أ+١٥$ **٥٥)** $١٠س^{٢}-٢٠س ص+١٠ص^{٢}$

حُلَّ كلَّ معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلِّك: (الدرس ٧-٣)

٥٦) $ن^{٢}-٩ن=-١٨$ **٥٧)** $١٠+أ^{٢}=-٧أ$ **٥٨)** $٢٢س-س^{٢}=٩٦$

أوجد ناتج كلًّا ممّا يأتي: (الدرس ٦-٧)

٥٩) $(س+٣)(س+٣)$ **٦٠)** $(٢س-٥)^{٢}$ **٦١)** $(٦س-١)^{٢}$ **٦٢)** $(٤س+٥)(٤س+٥)$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ ممَّا يأتي:

٦٣) $(س-٦)^{٢}$ **٦٤)** $(س-٢)(س-٢)$ **٦٥)** $(س+٣)(س+٣)$

٦٦) $(٢س-٥)^{٢}$ **٦٧)** $(٦س-١)^{٢}$ **٦٨)** $(٤س+٥)(٤س+٥)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٦-٧

المعادلات التربيعية: المربعات الكاملة

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست إيجاد ناتج ضرب مجموع وحيدتي حد في الفرق بينهما.

والآن

- أحلّل ثلاثية الحدود التي على صورة مربع كامل.
- أحلّ معادلات تتضمن مربعات كاملة.

المفردات

المربع الكامل لثلاثية حدود

لماذا؟

يسقط الحجر والكيس بالسرعة نفسها؛ لذا ستحتاج إلى حل المعادلة $٠ = -٥ن^٢ + ل_٠$، لمعرفة الزمن الذي يحتاج إليه الجسم كي يصل إلى الأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي ($ل_٠$) مترًا فوق الأرض، حيث (ن) تمثّل الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.

تحليل ثلاثية حدود على صورة مربع كامل: تعلمت قاعدة مفكوك ثنائيتي الحد $(أ + ب)^٢$، $(أ - ب)^٢$. تذكّر بأن تلك نواتج ضرب خاصة تتبع قاعدة معينة.

$$(أ + ب)^٢ = (أ + ب)(أ + ب)$$
$$= أ^٢ + أب + أب + ب^٢$$
$$= أ^٢ + ٢أب + ب^٢$$

$$(أ - ب)^٢ = (أ - ب)(أ - ب)$$
$$= أ^٢ - أب - أب + ب^٢$$
$$= أ^٢ - ٢أب + ب^٢$$

تكون نواتج الضّرب هذه على صورة **مربع كامل لثلاثية الحدود**؛ لأنها مربعات ثنائيات حد. وتساعدك القواعد أعلاه على تحليل ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملًا.

ولتكون ثلاثية حدود قابلة للتحليل على صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير مربعين كاملين، وأن يكون الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي للحدين الأول والأخير بإشارة موجبة أو سالبة.

فمثلاً ثلاثية الحدود $١٦س^٢ + ٢٤س + ٩$ تشكّل مربعًا كاملًا، كما هو موضح أدناه.

$١٦س^٢ + ٢٤س + ٩$

- هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم؛ لأن $١٦س^٢ = (٤س)^٢$.
- هل الحدّ الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي لكل من الحدين الأول والأخير؟ نعم؛ لأن $٢٤س = ٢(٤س)(٣)$.
- هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم؛ لأن $٩ = ٣^٢$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملًا

الرموز: $أ^٢ + ٢أب + ب^٢ = (أ + ب)(أ + ب) = (أ + ب)^٢$

$أ^٢ - ٢أب + ب^٢ = (أ - ب)(أ - ب) = (أ - ب)^٢$

أمثلة: $س^٢ + ٨س + ١٦ = (س + ٤)(س + ٤) = (س + ٤)^٢$

$س^٢ - ٦س + ٩ = (س - ٣)(س - ٣) = (س - ٣)^٢$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ١ تمييز ثلاثية الحدود التي تشكّل مربعًا كاملاً وتحليلها

حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملًا أم لا، و إذا كانت كذلك فحلِّلها.

أ) ٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، ٤ص^{٢} = (٢ص)^{٢}.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، ٩ = ٣^{٢}.

٣ هل الحد الأوسط يساوي ٢ (٢ص) (٣)؟ نعم، ١٢ص = ٢(٢ص)(٣).

بما أن الشروط الثلاثة متوفرة، فإن العبارة ٤ص^{٢}+ ١٢ص+ ٩ ثلاثية حدود تشكّل مربعًا كاملاً.

٤ص^{٢} + ١٢ص + ٩ = (٢ص)^{٢} + ٢(٢ص)(٣) + ٣^{٢} اكتب العبارة على صورة أ^{٢} + ٢أ ب + ب^{٢}

= (٢ص + ٣)^{٢} حلّل باستعمال القاعدة

ب) ٩س^{٢} - ٦س + ٤

١ هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، ٩س^{٢} = (٣س)^{٢}.

٢ هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، ٤ = ٢^{٢}.

٣ هل الحد الأوسط يساوي -٢(٣س)(٢)؟ لا، -٦س ≠ -٢(٣س)(٢).

بما أن الحد الأوسط لا يحقق الشرط، لذا فإن ثلاثية الحدود ٩س^{٢}- ٦ س+ ٤ لا تشكّل مربعًا كاملاً.

تحقق من فهمك

أ١) ٩ص^{٢} + ٢٤ص + ١٦ **ب١)** ٢أ^{٢} + ١٠أ + ٢٥

إرشادات للدراسة

تمييز ثلاثية الحدود التي تشكل مربعًا كاملاً

إذا كان الحد الثابت في ثلاثية الحدود سالبًا، فإن ثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً، لذا ليس من الضروري التحقق من الشروط الأخرى.

يكون تحليل ثلاثية الحدود تحليلاً تامًّا إذا كتب على صورة ناتج ضرب كثيرات حدود أولية. وقد تستعمل أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا. ويساعدك ملخص المفهوم الآتي لتقرر من أين تبدأ عند تحليل كثيرة الحدود تحليلًا تامًّا، وإذا لم يناسب كثيرة الحدود أي نمط، أو لايمكن تحليلها فإنها تكون أوليّة.

ملخص المفهوم طرق التحليل

أضف إلى مطويتك

الخطوات	عدد الحدود	أمثلة
الخطوة ١: حلّل بإخراج (ق . م . أ)	أي عدد	٤س^{٣} + ٢س^{٢} - ٦س = ٢س(٢س^{٢} + س - ٣)
الخطوة ٢: تحقق هل كثيرة الحدود تشكل فرقًا بين مربعين أم أنها ثلاثية حدود على صورة مربع كامل.	٢ أو ٣	٩س^{٢} - ١٦ = (٣س + ٤)(٣س - ٤) ١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩ = (٤س + ٣)^{٢}
الخطوة ٣: طبّق أنماط التحليل لـِ س^{٢} + ب س + جـ أو أ س^{٢} + ب س + جـ أو حلّل بتجميع الحدود.	٣ أو ٤	س^{٢} - ٨س + ١٢ = (س - ٢)(س - ٦) ١٢ص^{٢} + ٩ص + ٨ص + ٦ = (١٢ص^{٢} + ٩ص) + (٨ص + ٦) = ٣ص(٤ص + ٣) + ٢(٤ص + ٣) = (٤ص + ٣)(٣ص + ٢)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٢ التحليل التام

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب "أولية":

أ) ٥س^{٢} − ٨٠

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدين ٥س^{٢}، −٨٠ هو ٥، حلّل بإخراج (ق. م. أ).

الخطوة ٢: بما أن عدد الحدود اثنان، لذا تحقق من أن كثيرة الحدود تشكّل فرقًا بين مربعين.

٥س^{٢} − ٨٠ = ٥(س^{٢} − ١٦) (ق. م. أ) للحدين ٥

= ٥(س^{٢} − ٤^{٢}) س^{٢} = س × س، ١٦ = ٤ × ٤

= ٥(س − ٤)(س + ٤) تحليل الفرق بين مربعين

ب) ٩س^{٢} − ٦س − ٣٥

الخطوة ١: (ق. م. أ) للحدود: ٩س^{٢}، −٦س، −٣٥ هو ١.

الخطوة ٢: بما أن ٣٥ ليس مربعًا كاملاً، فثلاثية الحدود لا تشكّل مربعًا كاملاً.

الخطوة ٣: حلّل باستعمال النمط أ س^{٢} + ب س + جـ. هل يوجد عددان ناتج ضربهما ٩(−٣٥)، أو −٣١٥ ومجموعهما −٦؟ نعم، −٢١ وَ ١٥ ناتج ضربهما −٣١٥. ومجموعهما −٦.

٩س^{٢} − ٦س − ٣٥ = ٩س^{٢} + م س + ن س − ٣٥ استخدم القاعدة

= ٩س^{٢} + ١٥س − ٢١س − ٣٥ م = ١٥، ن = −٢١

= (٩س^{٢} + ١٥س) + (−٢١س − ٣٥) جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة

= ٣س(٣س + ٥) − ٧(٣س + ٥) حلّل كل تجمّع بإخراج (ق. م. أ)

= (٣س + ٥)(٣س − ٧) (٣س+٥) عامل مشترك

تحقق من فهمك

٢أ) ٢س^{٢} − ٣٢

٢ب) ١٢س^{٢} + ٥س − ٢٥

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة: عند استخدام خاصية الضرب الصفري في حل معادلات تتضمن عوامل متكررة يكفي مساواة أحد هذه العوامل بالصفر.

مثال ٣ حل معادلات تتضمن عوامل متكررة

حل المعادلة: ٩س^{٢} − ٤٨س = −٦٤.

٩س^{٢} − ٤٨س = −٦٤ المعادلة الأصلية

٩س^{٢} − ٤٨س + ٦٤ = ٠ أضف ٦٤ إلى الطرفين

(٣س)^{٢} − ٢(٣س)(٨) + (٨)^{٢} = ٠ تحقق إن كانت ثلاثية الحدود ٩س^{٢}−٤٨س+٦٤ تمثّل مربعًا كاملاً

(٣س − ٨)^{٢} = ٠ حلّل ثلاثية الحدود على صورة مربع كامل

(٣س − ٨)(٣س − ٨) = ٠ اكتب (٣س−٨)^{٢} كحاصل ضرب عاملين

إرشادات للدراسة

تحقق من إجابتك:

يمكنك التحقق من إجابتك من خلال:

- استعمال طريقة التوزيع بالترتيب.
- استعمال خاصية التوزيع
- تمثيل كلٍّ من العبارة الأصلية وتحليلها بالرسم والمقارنة بينهما.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٣س − ٨ = ٠	ضع أحد العوامل المتكررة = ٠
٣س = ٨	أضف ٨ إلى كلا الطرفين
$س = \frac{٨}{٣}$	اقسم كلا الطرفين على ٣

تحقق من فهمك

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين، وتحقق من صحة الحل :

٣أ) $أ^{٢} + ١٢أ + ٣٦ = ٠$

٣ب) $ص^{٢} - \frac{٤}{٣}ص + \frac{٤}{٩} = ٠$

قراءة الرياضيات

الجذر التربيعي

يقرأ $\pm\sqrt{١٦}$ موجب أو سالب الجذر التربيعي لـ ١٦

سبق أن حللت معادلات مثل $س^{٢} - ١٦ = ٠$ بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك أيضًا استعمال الجذر التربيعي لحل المعادلة.

$س^{٢} - ١٦ = ٠$	المعادلة الأصلية
$س^{٢} = ١٦$	أضف ١٦ إلى كلا الطرفين
$س = \pm\sqrt{١٦}$	خاصية الجذر التربيعي

تذكّر أنه يوجد جذران تربيعيان لـ ١٦، هما ٤ وَ −٤. لذا فإن مجموعة الحل هي {−٤، ٤}. ويمكنك التعبير عن ذلك بـ $\{\pm ٤\}$.

مفهوم أساسي — **خاصية الجذر التربيعي**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لحل المعادلة التربيعية على الصورة $س^{٢} = ن$، خُذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الرموز: لأي عدد حقيقي ن ≥ ٠، إذا كان $س^{٢} = ن$ فإنَّ $س = \pm\sqrt{ن}$.

مثال: $س^{٢} = ٢٥$

$س = \pm\sqrt{٢٥} = \pm ٥$

إذا كانت ن في المعادلة $س^{٢} = ن$، ليست مربعًا كاملاً، فتحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي، لذا استعمل الآلة الحاسبة. أما إذا كانت ن مربعًا كاملاً فستحصل على إجابة دقيقة.

مثال ٤ — **استعمال خاصية الجذر التربيعي**

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) $(ص - ٦)^{٢} = ٨١$

$(ص - ٦)^{٢} = ٨١$	المعادلة الأصلية
$ص - ٦ = \pm\sqrt{٨١}$	خاصية الجذر التربيعي
$ص - ٦ = \pm ٩$	٨١ = ٩ × ٩
$ص = ٦ \pm ٩$	أضف ٦ إلى كلا الطرفين
$ص = ٦ + ٩$ أو $ص = ٦ - ٩$	افصل المعادلة إلى معادلتين
$= ١٥$ $= -٣$	بسّط

الجذران هما ١٥ وَ −٣

تحقق بالتعويض في المعادلة الأصلية

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

ب) $(س + ٦)^{٢} = ١٢$

$(س + ٦)^{٢} = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س + ٦ = \pm \sqrt{١٢}$	خاصية الجذر التربيعي
$س = -٦ \pm \sqrt{١٢}$	اطرح ٦ من كلا الطرفين

الجذران هما $-٦ + \sqrt{١٢}$ ، $-٦ - \sqrt{١٢}$.

باستعمال الآلة الحاسبة، $-٦ + \sqrt{١٢} \approx -٢,٥٤$ ، $-٦ - \sqrt{١٢} \approx -٩,٤٦$

تحقق من فهمك

٤أ) $(أ - ١٠)^{٢} = ١٢١$ **٤ب)** $(ع + ٣)^{٢} = ٢٦$

مثال ٥ من واقع الحياة حل المعادلة

فيزياء: أُسقطت كرة من ارتفاع ٦٨ مترًا. إذا كانت المعادلة $ع = -٥ن^{٢} + ع_{.}$ تُستعمل لإيجاد عدد الثواني (ن) التي تحتاج إليها الكرة للوصول إلى الارتفاع (ع) من الارتفاع الابتدائي ($ع_{.}$) بالمتر، فأوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.

عند مستوى الأرض، ع = ٠ والارتفاع الابتدائي ٦٨ ، إذن $ع_{.} = ٦٨$

$ع = -٥ن^{٢} + ع_{.}$	المعادلة الأصلية
$٠ = -٥ن^{٢} + ٦٨$	عوض عن ع بـ صفر، وعن $ع_{.}$ بـ ٦٨
$-٦٨ = -٥ن^{٢}$	اطرح ٦٨ من كلا الطرفين
$١٣,٦ = ن^{٢}$	اقسم على -٥
$ن \approx \pm ٣,٧$	خاصية الجذر التربيعي

بما أن العدد السالب هنا ليس منطقيًّا، لذا تستغرق الكرة ٣,٧ ثوانٍ تقريبًا للوصول إلى الأرض.

تاريخ الرياضيات

جاليليو جاليلي
(١٥٦٤م-١٦٤٢م)
كان جاليليو أول من أثبت أن الأجسام المختلفة الكتل تسقط بالسرعة نفسها، وذلك بإسقاط جسمين مختلفي الكتلة من قمة برج بيزا المائل في إيطاليا عام ١٥٨٩ ميلادية.

تحقق من فهمك

٥) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض إذا أُسقطت من سطح مبنى ارتفاعه نصف الارتفاع المذكور أعلاه.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكِّل مربعًا كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١) $٢٥س^{٢} + ٦٠س + ٣٦$ ٢) $٦س^{٢} + ٣٠س + ٣٦$

مثال ٢ حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية ، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية" :

٣) $٢س^{٢} - س - ٢٨$ ٤) $٤س^{٢} + ٦٤$ ٥) $٤س^{٢} + ٩س - ١٦$

المثالان ٣ ، ٤ حل كلًّا من المعادلات الآتية ، وتحقق من صحة الحل:

٦) $٤س^{٢} = ٣٦$ ٧) $٦٤ص^{٢} - ٤٨ص + ١٨ = ٩$ ٨) $(ع + ٥)^{٢} = ٤٧$

مثال ٥ ٩) **طلاء:** سقطت فرشاة الدهان من نايف أثناء قيامه بطلاء غرفة نومه، من ارتفاع ٢م. استعمل المعادلة $ع = -٥ن^{٢} + ع$ لإيجاد العدد التقريبي للثواني التي تستغرقها الفرشاة للوصول إلى الأرض.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ حدّد إن كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملاً أم لا، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١٠) $٤س^{٢} - ٤٢س + ١١٠$ ١١) $١٦س^{٢} - ٥٦س + ٤٩$ ١٢) $٨١س^{٢} - ٩٠س + ٢٥$

مثال ٢ حلل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب " أولية ":

١٣) $٢٤د^{٢} + ٣٩د - ١٨$ ١٤) $٨س^{٢} + ١٠س - ٢١$

١٥) $٢ب^{٢} + ١٢ب - ٢٤$ ١٦) $١٦أ^{٢} - ١٢١ب^{٢}$

١٧) $١٢م^{٣} - ٢٢م^{٢} - ٧٠م$ ١٨) $٨جـ^{٢} - ٨٨جـ + ٢٤٢$

١٩) $و^{٤} - و^{٢}$ ٢٠) $١٢ل^{٣} - ٣ل$

٢١) $١٦ك^{٣} - ٤٨ك^{٢} + ٣٦ك$ ٢٢) $٤ن^{٣} + ١٠ن^{٢} - ٨٤ن$

٢٣) $٢أ^{٢}ب^{٢} - ٢أ^{٢} - ٢أب^{٣} + ٢أب$ ٢٤) $٢ر^{٣} - ر^{٢} - ٧٢ر + ٣٦$

٢٥) $٣ك^{٣} - ٢٤ك^{٢} + ٤٨ك$ ٢٦) $جـ^{٢} + ٢جـ - ٣هـ^{٢} + ٤هـ$

٢٧) $٨ص^{٢} - ٢٠٠ع^{٢}$

المثالان ٣ ، ٤ حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٢٨) $٤م^{٢} - ٢٤م + ٣٦ = ٠$ ٢٩) $(ص - ٤)^{٢} = ٧$

٣٠) $أ^{٢} + \frac{١٠}{٧}أ + \frac{٢٥}{٤٩} = ٠$ ٣١) $س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + \frac{٩}{١٦} = ٠$

٣٢) $س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٢٥$ ٣٣) $٥س^{٢} - ٦٠س = -١٨٠$

٣٤) $٤س^{٢} = ٨٠س - ٤٠٠$ ٣٥) $٩ - ٥٤س = -٨١س^{٢}$

٣٦) $٤جـ^{٢} + ٤جـ + ١ = ١٥$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٥

٣٧) **فيزياء:** أُسقط بالون ماء في تجربة من نافذة في المدرسة. ارتفاعها ٩م. ما الزمن الذي يستغرقه البالون ليصل إلى الأرض؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من مئة.

٣٨) **هندسة:** مُثِّلتْ مساحة مربع بالعبارة $٩س^{٢} - ٤٢س + ٤٩$. أوجد طول ضلع المربع.

٣٩) **هندسة** إذا كانت العبارة $٨ص^{٣} + ٤٠ص^{٢} + ٥٠ص$ تمثّل حجم منشور رباعي قاعدته مستطيلة. فأوجد أبعاد المنشور الممكنة على صورة كثيرات الحدود بمعاملات أعداد صحيحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٤٠) **اكتشف الخطأ:** حلّل منصور وفيصل العبارة $س^{٨} - س^{٤}$ تحليلاً تامًّا ، فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك.

منصور	فيصل
$س^{٨} - س^{٤} = س^{٤}(س^{٢} + ١)(س^{٢} - ١)$	$س^{٨} - س^{٤} = س^{٤}(س^{٢} + ١)(س - ١)(س + ١)$

٤١) **تحدّ:** حلّل $س^{ن+٦} + س^{ن+٢} + س^{ن}$ تحليلاً تامًّا.

٤٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة ثلاثية حدود تشكل مربعًا كاملاً يكون معامل الحد الأوسط سالبًا والحد الأخير كسرًا اعتياديًّا، ثم حلّ المعادلة.

٤٣) **تبرير:** اكتب مثالاً مضادًّا للعبارة:
"لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة ثلاثة حلول حقيقية دائمًا".

٤٤) **اكتب:** فسّر كيف تحلّل كثيرة حدود تحليلاً تامًّا.

٤٥) حدّد ثلاثية الحدود التي تختلف عن كثيرات الحدود الأخرى فيما يأتي، وفسّر إجابتك:

$٩س^{٢} - ٢٤س + ١٦$	$٤س^{٢} + ١٠س + ٤$	$٢٥س^{٢} + ١٠س + ١$	$٤س^{٢} - ٣٦س + ٨١$

٤٦) **اكتب:** فسّر كيف تحدّد إذا كانت ثلاثية الحدود تشكل مربعًا كاملاً.

تدريب على اختبار

٤٧) حُلَّ المعادلة $(س - ٣)^{٢} = ٢٥$.

أ) $-٨، ٢$ ب) $-٢، ٨$ جـ) $٤، ١٤$ د) $-٤، ١٤$

٤٨) **هندسة** إذا كان محيط دائرة $\frac{٦ط}{٥}$ وحدة، فما مساحتها؟

أ) $\frac{٣ط}{٥}$ وحدة مربعة

ب) $\frac{١٢ط}{٥}$ وحدة مربعة

جـ) $\frac{٩ط}{٢٥}$ وحدة مربعة

د) $\frac{٣٠ط}{٢٥}$ وحدة مربعة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

حلّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا باستعمال الأعداد الصحيحة فاكتب "أولية": (الدرس ٧- ٥)

٤٩) $٤س^{٢} - ٨١ص^{٢}$ ٥٠) $١ - ١٠٠ل^{٢}$ ٥١) $٣أ^{٢} - ٢٠$ ٥٢) $٢٥ن^{٢} - ١$

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية، و تحقق من صحة الحل: (الدرس ٧- ٤)

٥٣) $٦س^{٢} - ٤٨س + ٩٠ = ٠$ ٥٤) $١٤س^{٢} + ١٤س = ٢٨$ ٥٥) $٢س^{٢} - ١٠س = ٤٨$

٥٦) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين (٥، ٧) (−٢، −٣). (الدرس ٢- ٥)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ميل المستقيم المارّ بكلِّ زوجٍ من النقاط في كلٍّ ممّا يأتي:

٥٧) (٢ ، −١) (٥ ، −٣)

٥٨) (−٥ ، ٤) (−٥ ، −١)

٥٩) (−٢ ، ٣) (٨ ، ٣)

حلّل كل وحيدة حد فيما يأتي تحليلاً تامًّا:

١) ٢٥س^{٢}ص^{٤}

٢) ١٧أب^{٢}

٣) −١٨جـ^{٥}د^{٣}

٤) **حديقة:** زرع مالك ١٤٠ نبتة مرتبة على صورة مستطيل في حديقة منزله. فبكم طريقة يمكنه ترتيبها ليكون لديه على الأقل ٤ صفوف، وعدد النبتات نفسه في كل صف، على ألا يقل عن ٦ نبتات.

أوجد (ق. م. أ) لكل مجموعة وحيدات حد فيما يأتي:

٥) ٢أ، ٨أ^{٢}، ١٦أ^{٣}

٦) ٧جـ، ٢٤د

٧) ٥٠جـ^{٢}هـ، ١٢٠جـهـ

٨) ٨ك^{٢}ر^{٢}، ٣٦ك ر

٩) **اختيار من متعدد:** إذا كانت مساحة المستطيل أدناه ٢س^{٢} − س − ١٥ وحدة مربعة، فما عرضه؟

أ) س − ٥

جـ) س − ٣

ب) س + ٣

د) ٢س − ٣

استعمل خاصية التوزيع لتحليل كل من كثيرتي الحدود الآتيتين:

١٠) ٥س ص − ١٠س

١١) ٧أب + ١٤أب^{٢} + ٢١أ^{٢} ب

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين:

١٢) ٤س^{٢} + ٨س + س + ٢

١٣) ١٠أ^{٢} − ٥٠أ − أ + ٥

حل كلَّ معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

١٤) ص (ص − ١٤) = ٠

١٥) ٣س (س + ٦) = ٠

١٦) أ^{٢} = ١٢أ

١٧) **اختيار من متعدد:** ترغب نوال في فرش غرفةٍ مساحتها (س^{٢} − ٩) متر مربع بالسجاد، إذا كان عرض الغرفة (س − ٣) مترًا، فما طولها بالأمتار؟

أ) س − ٣

جـ) س + ٣

ب) س − ٩

د) ٣

حلّل كلًّا من ثلاثيات الحدود الآتية:

١٨) س^{٢} + ٧س + ٦

١٩) س^{٢} − ٣س − ٢٨

٢٠) ١٠س^{٢} − س − ٣

٢١) ١٥س^{٢} + ٧س − ٢

٢٢) س^{٢} − ٢٥

٢٣) ٤س^{٢} − ٨١

٢٤) ٩س^{٢} − ١٢س + ٤

٢٥) ١٦س^{٢} + ٤٠س + ٢٥

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وتحقق من صحة الحل:

٢٦) س^{٢} − ٤س = ٢١

٢٧) س^{٢} − ٢س − ٢٤ = ٠

٢٨) ٦س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠

٢٩) ٢س^{٢} − ١٣س + ٢٠ = ٠

٣٠) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يُعدُّ عاملاً من عوامل س^{٤} − ١ عند تحليلها تحليلاً تامًّا؟

أ) س^{٢} − ١

جـ) س

ب) س − ١

د) ١

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) جهَّز زياد الأعداد المدوَّنة في الجدول لكل نوعٍ من أنواع الكعك، إذا أراد وضع العدد نفسه من كل نوعٍ من الكعك في كل سلةٍ، بحيث تحوي السلة أكبر عددٍ ممكنٍ من كل نوع من أنواع الكعك جميعها، فما عدد السلال اللَّازمة؟
"تلميح: لا يشترط استخدام جميع قطع الكعك".

نوع الكعك	العدد
بالشوكولاتة	٥٤
بالفراولة	٤٥
بالفواكة	٣٦
بالكراميل	٦٠

أ) ١٨ جـ) ١٢
ب) ١٦ د) ١٠

٢) باستعمال المعلومات في السؤال ١، كم قطعة كعكٍ من كل نوعٍ ستحوي كلُّ سلةٍ؟

أ) ٢ جـ) ٤
ب) ٣ د) ٦

٣) حلّل: م ن + ٥ م – ٣ ن – ١٥

أ) (م ن – ٣) (٥) جـ) (م – ٥) (ن + ٣)
ب) (ن – ٣) (م + ٥) د) (م – ٣) (ن + ٥)

٤) أيٌّ ممَّا يأتي يمثل حلًّا للمعادلة: $س^{٢} + ٦س - ١١٢ = ٠$ ؟

أ) –١٤ جـ) ٦
ب) –٨ د) ١٢

إرشادات للاختبارات

سؤال ٤ : يمكن التحقق من الحل بتعويض العدد في المعادلة؛ للحصول على جملةٍ رياضيةٍ صحيحةٍ.

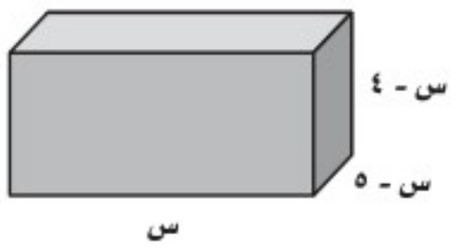
٥) أيٌّ من كثيرات الحدود الآتية، كثيرة حدود أولية؟

أ) $٥س^{٢} + ٣٤س + ٢٤$
ب) $٤س^{٢} + ٢٢س + ١٠$
جـ) $٤س^{٢} + ٣٨س + ٧٠$
د) $٥س^{٢} + ٣س + ٤$

٦) أيٌّ ممَّا يأتي لا يُعدُّ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $٤٥ب^{٢} - ٨٠ جـ^{٢}$؟

أ) ٥ جـ) ٢ب – ٥جـ
ب) ٣ب – ٤جـ د) ٣ب + ٤جـ

٧) إذا كان حجم متوازي المستطيلات أدناه يساوي ٥٦س سنتمترًا مكعبًا،



فأيٌّ من الأعداد التالية، لا يمثل بُعدًا لمتوازي المستطيلات؟

أ) ٦سم جـ) ٨سم
ب) ٧سم د) ١٢سم

٨) عند تحليل كثيرة الحدود: $ص^{٢} - ٩ص + ٢٠$، نحصل على:

أ) (ص – ٢) (ص – ١٠)
ب) (ص – ٤) (ص – ٥)
جـ) (ص – ٢) (ص – ٧)
د) (ص – ٥) (ص + ٢)

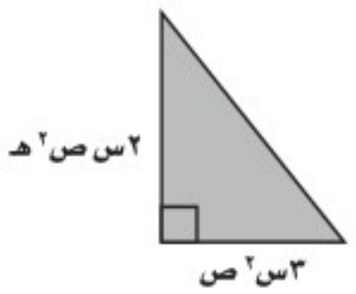
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إجابات قصيرة

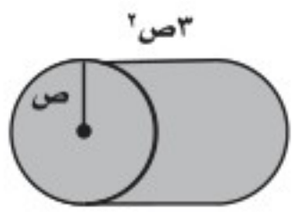
أجب عن الأسئلة الآتية:

عبِّر عن كلٍّ ممَّا يأتي في صورة وحيدة حدٍّ.

٩) مساحة المثلث:



١٠) حجم الأسطوانة:



بسِّط كلَّ عبارةٍ ممَّا يأتي، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا.

١١) $\frac{م^{٣} ن^{٢}}{م ن}$

١٢) $\left(\frac{٣جـ^{٢} هـ^{٣}}{٢س}\right)^{٣}$

١٣) $\left(\frac{٩س^{٢} ص^{٣}}{٥هـ^{٣} س^{٢} ص^{٢}}\right)^{٠}$

١٤) المعادلة: ع = −١٦ن^{٢} + ٤٠ن + ٣ تمثِّل ارتفاع بالون فوق سطح الأرض بالقدم بعد ن ثانيةً من إطلاقه، أوجد ارتفاعه بعد ثانيتين من إطلاقه.

إجابات مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضِّحًا خطوات الحل:

١٥) المعادلة: ع = −١٦ن^{٢} + ٢٠٠ن تمثِّل ارتفاع كرة تمَّ ركلها من الأرض لأعلى.

أ) عبِّر عن الارتفاع بصورة كثيرة حدودٍ بعد تحليلها تحليلًا تامًّا.

ب) في أي وقت يكون ارتفاع الكرة عن الأرض مساويًا للصفر؟ وضِّح معنى ذلك.

جـ) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟ ومتى يكون ذلك؟

للمساعدة ..															
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
فراجع الدرس ..	٧-١	٧-١	٧-٢	٧-٣	٧-٤	٧-٥	٧-٦	٧-٣	٦-١	٦-١	٦-٢	٦-٢	٦-٢	مهارة سابقة	٧-٤

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل ٨
الدوالّ التربيعية

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل للعوامل واستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أحلّ المعادلات التربيعية بيانيًا، وبإكمال المربع، و باستعمال القانون العام.

لماذا ؟

تكاليف: تقدر التكلفة الكلية "ت" للإنتاج اليومي لمنتج ما في منشأة صناعية بالدالة:
ت(س) = ٨٠٠ − ١٠س + $\frac{١}{٤}$ س^{٢} حيث س عدد الوحدات المنتجة يوميًا، ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيًا لإيجاد عدد الوحدات المنتجة في اليوم الذي يجعل التكلفة أقل ما يمكن.

المفردات:

- الدالة التربيعية ص (١٠٦)
- الجذر المكرر ص (١١٦)
- إكمال المربع ص (١٢٢)
- القانون العام ص (١٢٨)

المطويات منظم أفكار

الدوال التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول التمثيل البياني للدوال التربيعية، مبتدئًا بورقة ملاحظات.

١ **اطو** الورقة طوليًّا بحيث يتكوَّن هامش خارجي دليلاً على المطوية.

٢ **اطو** الورقة مرتين عرضيًّا لتكوين أربعة أقسام.

٣ **افتح** الطية وقص على خطوط الطي العرضية.

٤ **سمِّ** كل قسم كما في الشكل أدناه.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل ٨

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا: (مهارة سابقة)

١) ص = س + ٣

٢) ص = ٢س + ٢

٣) ص = −٢س − ٣

٤) ص = ٠,٥س − ١

٥) ٤س − ٣ص = ١٢

٦) ٣ص = ٦ + ٩س

٧) ص − س = ١

٨) ٣ص = ٦س

٩) **توفير:** مع محسن ١٠٠ ريال، ويخطط لتوفير ١٠ ريالات أسبوعيًّا، مثّل بيانيًّا معادلة تبيّن المبلغ الكلي (م) الذي سيوفره محسن في (س) أسبوعًا.

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها: (الدرس ٧-٦)

١٠) $أ^٢ + ١٢أ + ٣٦$

١١) $س^٢ + ٥س + ٢٥$

١٢) $س^٢ - ١٢س + ٣٢$

١٣) $س^٢ + ٢٠س + ١٠٠$

١٤) $٤س^٢ + ٢٨س + ٤٩$

١٥) $ك^٢ - ١٦ك + ٦٤$

١٦) $أ^٢ - ٢٢أ + ١٢١$

١٧) $٥ت^٢ - ١٢ت + ٢٥$

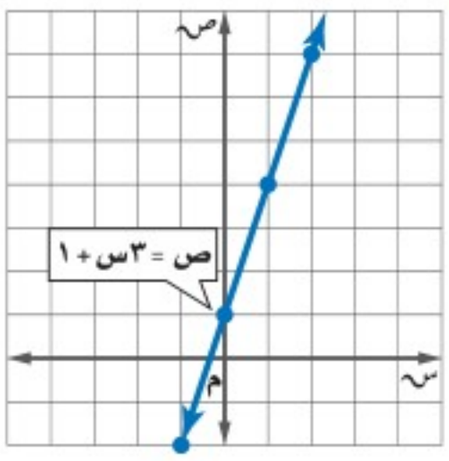
١٨) $س^٢ + ٢س + ١$

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص = ٣س + ١ بيانيًّا.

س	ص = ٣س + ١	ص
−١	٣(−١) + ١	−٢
٠	٣(٠) + ١	١
١	٣(١) + ١	٤
٢	٣(٢) + ١	٧



مثال ٢

حدّد إذا كانت ثلاثية الحدود $س^٢ - ١٠س + ٢٥$ تشكل مربعًا كاملًا ، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

١) هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم

٢) هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم

٣) هل الحد الأوسط يساوي −٢ (١س) (٥)؟ نعم

$س^٢ - ١٠س + ٢٥ = (س - ٥)^٢$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

١-٨

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية بيانيًا.

والآن

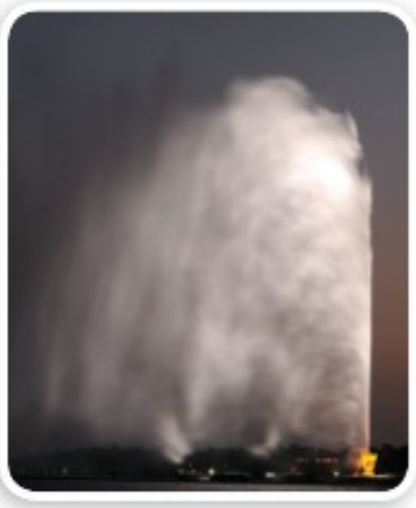
- أحلّل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.
- أمثّل الدوال التربيعية بيانيًا.

المفردات

الدالة غير الخطية
الدالة التربيعية
الصورة القياسية للدالة التربيعية
القطع المكافئ
محور التماثل
الرأس
القيمة الصغرى
القيمة العظمى
متماثل

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa



لماذا؟

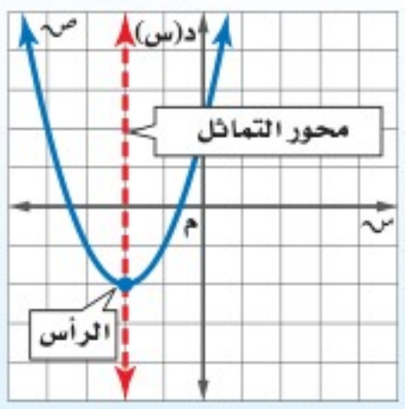
تُعد نافورة الملك فهد في جدة أعلى نافورة من نوعها في العالم، إذ يصل ارتفاعها إلى ٣١٢ مترًا، وتقدم عرضًا رائعًا لحركة المياه والضوء، ويمكن تمثيل حركة المياه بمعادلات تربيعية. كما يمكنك استعمال التمثيلات البيانية لهذه المعادلات لتوضيح مسار المياه.

خصائص الدوال التربيعية: درست سابقًا الدوال الخطية، وهناك أيضًا **دوالّ غير خطية** تختلف أشكال تمثيلاتها البيانية. **فالدوال التربيعية** مثلاً هي دوال غير خطية، ويمكن كتابتها على الصورة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ ، حيث أ ≠ ٠، وتُسمى هذه الصورة **بالصورة القياسية** للدالة التربيعية، ويسمى التمثيل البياني للدالة التربيعية **قطعًا مكافئًا**. وتتماثل القطوع المكافئة حول خط يتوسطها يُسمى **محور التماثل**، يقطع القطع في نقطة واحدة تُسمى **الرأس**.

مفهوم أساسي — **الدوال التربيعية**

أضف إلى مطويتك

الدالة المولدة (الأم):	د(س) = س^{٢}
الصورة القياسية:	د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ
شكل التمثيل:	قطع مكافئ
محور التماثل:	$س = -\frac{ب}{٢أ}$
المقطع الصادي:	جـ

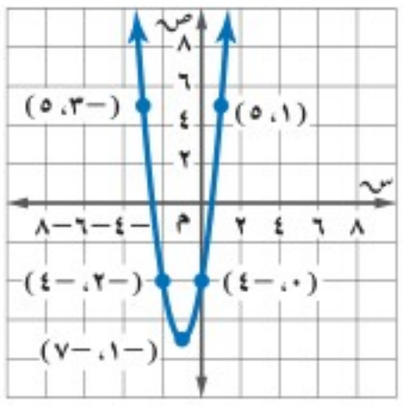


ويكون التمثيل البياني للدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ مفتوحًا إلى أعلى، إذا كان أ > ٠، وتمثل أدنى نقطة فيه نقطة **القيمة الصغرى**، ويكون مفتوحًا إلى أسفل، إذا كان أ < ٠ وتمثّل أعلى نقطة فيه نقطة **القيمة العظمى**، وتمثِّل نقطتا القيمة العظمى أو القيمة الصغرى رأس القطع.

مثال ١ — **التمثيل البياني للقطع المكافئ**

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص = ٣س^{٢} + ٦س − ٤ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

س	ص
١	٥
٠	−٤
−١	−٧
−٢	−٤
−٣	٥



مثّل الأزواج المرتبة بيانيًّا، ثُم صِل بينها بمنحنى. يمتد التمثيل البياني للقطع المكافئ إلى ما لا نهاية من كلا طرفيه، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها هو { ص| ص ≤ −٧ }؛ لأن −٧ هي القيمة الصغرى.

مراجعة المفردات

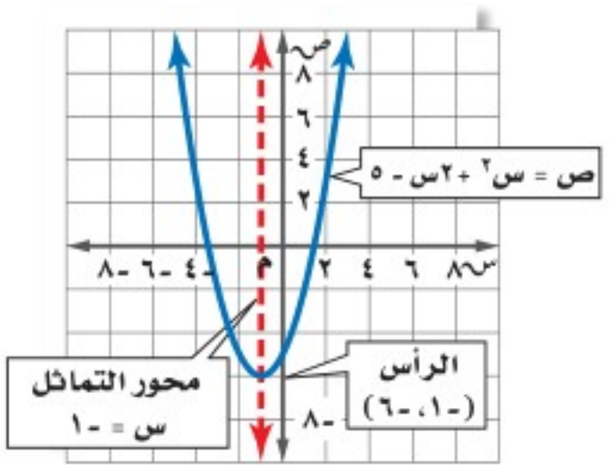
المجال والمدى

المجال هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير المستقل س. وأما المدى فهو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع ص.

تحقق من فهمك

١) استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص = س^{٢} + ٣ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

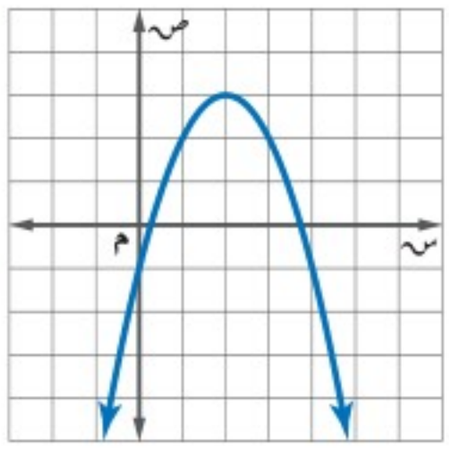


الأشكال **المتماثلة** هي تلك الأشكال التي يكون نصفاها متطابقين تمامًا. فالقطع المكافئ هو شكل متماثل وله محور تماثل، وكل نقطة في نصف القطع إلى يسار محور التماثل تقابلها نقطة في النصف الآخر له.

ومن الأسهل عادة تحديد الرأس أولًا عند إيجاد الخصائص من التمثيل البياني، والذي يمثل إما نقطة عظمى أو نقطة صغرى للقطع.

مثال ٢ تحديد خصائص القطع المكافئ من تمثيله البياني

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للتمثيل البياني الآتي:



الخطوة ١: أوجد الرأس.

بما أن القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل فالرأس يمثّل النقطة العظمى له وهي (٢، ٣).

الخطوة ٢: أوجد محور التماثل.

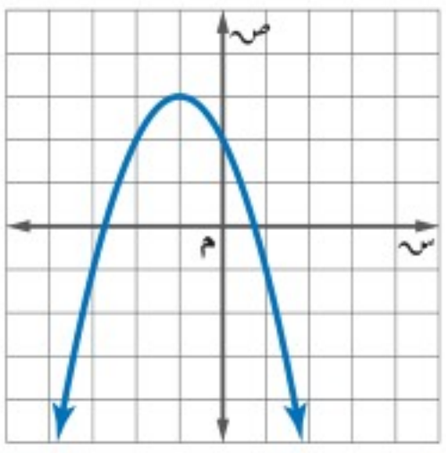
بما أن محور التماثل هو المستقيم الذي يمر بالرأس، ويقسم القطع إلى نصفين متطابقين؛ لذا تكون معادلة محور التماثل هي س= ٢.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

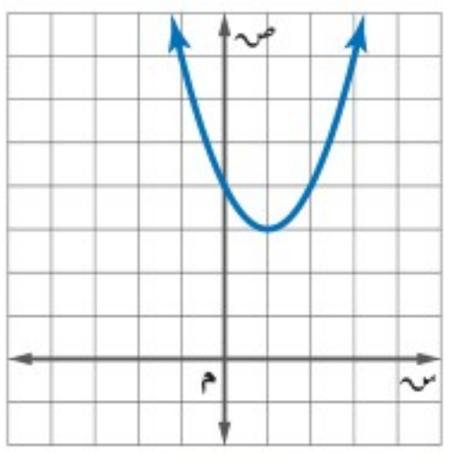
بما أن المقطع الصادي هو النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع محور الصادات، وهي النقطة (٠، -١)؛ لذا يكون المقطع الصادي هو -١.

تحقق من فهمك

٢أ)



٢ب)



عند تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة الدالة يكون من الأسهل غالبًا إيجاد معادلة محور التماثل أولاً.

مثال ٣ تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة دالته

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للدالة: ص = ٢ س^{٢} + ٤س - ٣

$$س = -\frac{ب}{٢أ}$$ صيغة معادلة محور التماثل

$$س = -\frac{٤}{٢ \times ٢} = -١$$ أ = ٢، ب = ٤، بسّط

معادلة محور التماثل هي س= -١ .

ولإيجاد إحداثي الرأس، خذ القيمة الناتجة من معادلة محور التماثل، واعتبرها إحداثيًّا سينيًّا لرأس القطع المكافئ، ثم عوّضها في معادلة القطع المكافئ لإيجاد الإحداثي الصادي.

ص = ٢س^{٢} + ٤س -٣ المعادلة الأصلية

$= ٢(-١)^{٢} + ٤(-١) - ٣ = -٥$ س = -١، بسّط

الرأس هو (-١، -٥)، وبما أن المقطع الصادي هو عند النقطة (٠، جـ) دائمًا؛ لذا فالمقطع الصادي هو -٣.

إرشادات للدراسة

المقطع الصادي

المقطع الصادي هو الحد الثابت (جـ) للدالة التربيعية في الصورة القياسية

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

٣أ) ص = -٣ س^{٢} + ٦س $-$ ٥ **٣ب)** ص = ٢س^{٢} + ٢س + ٢

هناك فروق عامة بين الدوال الخطية والدوال التربيعية تظهر في الجدول الآتي:

	الدوال الخطية	الدوال التربيعية
الصورة القياسية	ص = أ س + ب	ص = أ س^{٢} + ب س + جـ ؛ أ ≠ ٠
الدرجة	١، لاحظ أن جميع المتغيرات من الدرجة الأولى.	٢، لاحظ أن المتغير المستقل س في الحد الأول هو من الدرجة الثانية، ومعامله أ لا يمكن أن يساوي صفرًا، وإلا أصبحت الدالّة خطية.
مثال	ص = ٢س + ٦	ص = ٣س^{٢} + ٥س $-$ ٤
التمثيل البياني	خط مستقيم	قطع مكافئ

كيف تحدد إن كان القطع المكافئ مفتوحًا إلى الأعلى أم إلى أسفل، وإذا كان الرأس يمثل له نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

مفهوم أساسي — القيم العظمى والقيم الصغرى

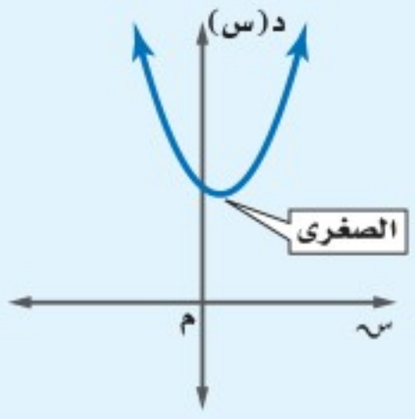
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون التمثيل البياني للدالة: د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ، حيث أ ≠ ٠:

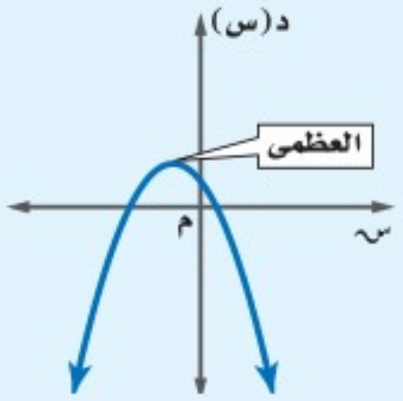
- مفتوحًا إلى أعلى وله قيمة صغرى عندما أ > ٠
- مفتوحًا إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما أ < ٠
- مدى الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على أو تساوي القيمة الصغرى إذا كانت أ > ٠، أو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى إذا كانت أ < ٠.

مثال:

أ موجبة



أ سالبة



مثال ٤ القيم العظمى والقيم الصغرى

لتكن د(س) = -٢ س^{٢} $-$ ٤س + ٦.

أ) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

في الدالة د(س) = -٢س^{٢} $-$ ٤س + ٦، أ = -٢، ب = -٤، جـ = ٦.

بما أن أ عدد سالب فالتمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى أسفل، ويكون للدالة قيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي الصادي للرأس.

الإحداثي السيني للرأس = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٤}{(-٢)٢} = -١$.

الدالة الأصلية: د (س) = -٢س^{٢} $-$ ٤س + ٦

س = -١: د (-١) = $-٢(-١)^{٢} - ٤(-١) + ٦$

بسّط: د (-١) = ٨

إذن، القيمة العظمى تساوي ٨

تنبيه!

القيم الصغرى والقيم العظمى

لا تنسَ إيجاد كلا الإحداثيين السيني والصادي للرأس (س، ص)، حيث إن القيمة الصغرى أو القيمة العظمى تمثّل الإحداثي الصادي له.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

جـ) حدد مجال الدالة ومداها.

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى، أي {ص|ص ≤ ٨ }.

تحقق من فهمك

ليكن د (س) = ٢س^{٢} − ٤س − ١ .

٤أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

٤ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

٤جـ) حدد مجال الدالة ومداها.

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا: تعلّمت كيفية إيجاد العديد من الخصائص المهمة للدوال التربيعية.

مفهوم أساسي — **تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا**

أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.

الخطوة ٢: أوجد الرأس وحدّد إذا كان يمثّل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

الخطوة ٤: استعمل التماثل لإيجاد نقاط أخرى على التمثيل البياني للدالة عند الضرورة.

الخطوة ٥: صِل بين النقاط بمنحنى.

إرشادات للدراسة

التماثل والنقاط

النقاط الواقعة على الطرفين المتقابلين لمحور التماثل تبعد المسافة نفسها عن المحور يمينًا ويسارًا، كما تبعد بعدًا متساويًا من الرأس.

مثال ٥ — **تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا**

مثّل الدالة د (س) = س^{٢} + ٤س + ٣ بيانيًّا.

الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ — صيغة معادلة محور التماثل

س = $\frac{-٤}{٢ \times ١}$ — أ = ١ ، ب = ٤

س = −٢ — بسّط

الخطوة ٢: أوجد الرأس، وحدّد فيما إذا كان يمثّل نقطة صغرى أم عظمى.

ص = س^{٢} + ٤س + ٣ — المعادلة الأصلية

= (−٢)^{٢} + ٤(−٢) + ٣ — س = −٢

= −١ — بسّط

يقع الرأس عند النقطة (−٢، −١)، وبما أن أ موجبة، فالتمثيل يكون مفتوحًا إلى أعلى؛ لذا يمثّل الرأس قيمة صغرى.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

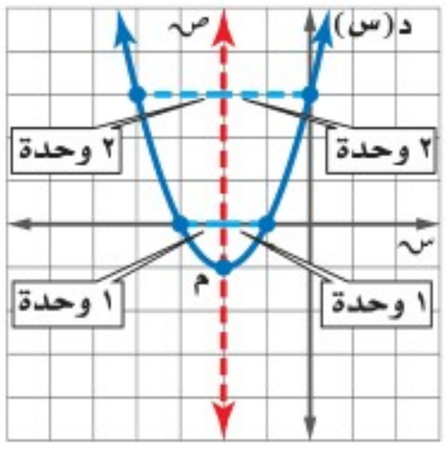
ص = س^{٢} + ٤س + ٣ — المعادلة الأصلية

= (٠)^{٢} + ٤(٠) + ٣ — س = ٠

= ٣ — بسّط

المقطع الصادي يساوى ٣.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443



الخطوة ٤: يقسم محور التماثل القطع المكافئ إلى جزأين متطابقين، لذا فإنه لكل نقطة على أحد الجزأين توجد نقطة تناظرها في الجزء الآخر، وتبعد المسافة نفسها عن المستقيم الذي يمثّل محور التماثل، وللنقطتين الإحداثي الصادي نفسه

الخطوة ٥: صِل بين النقاط بمنحنى.

تحقق من فهمك

٥أ) د(س) = $-٢س^{٢} + ٢س - ١$

٥ب) د(س) = $٣ س^{٢} - ٦س + ٢$

الربط مع الحياة

أُنشئت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية في جامعة الملك خالد عام ١٤٢٢هـ؛ لتهيئة سبل التواصل بين المهتمين بمجالات العلوم الفيزيائية المختلفة، من خلال عقد وتنظيم الندوات والمؤتمرات في مجال العلوم الفيزيائية.

استعملت معلوماتك حول الدوال التربيعية والقطوع المكافئة والتماثل لإنشاء تمثيلات بيانية، ويمكنك تحليل هذه التمثيلات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٦ من واقع الحياة — استعمال تمثيل الدوال التربيعية بيانيًّا

فيزياء: عرضت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية فيلمًا لإطلاق نموذج صاروخ، حيث يمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ عن الأرض بالأقدام بعد (س) ثانية بالدالة ف(س) = $-١٣س^{٢} + ١٣٠س + ٣١٢$.

أ) مثّل الدالة بيانيًّا.

س = $-\frac{ب}{٢أ}$ — معادلة محور التماثل

س = $-\frac{١٣٠}{٢(-١٣)} = ٥$ — أ = −١٣ ، ب = ١٣٠

بما أن معادلة محور التماثل س = ٥؛ لذا فالإحداثي السيني للرأس هو ٥.

ص = $-١٣س^{٢} + ١٣٠س + ٣١٢$ — المعادلة الأصلية

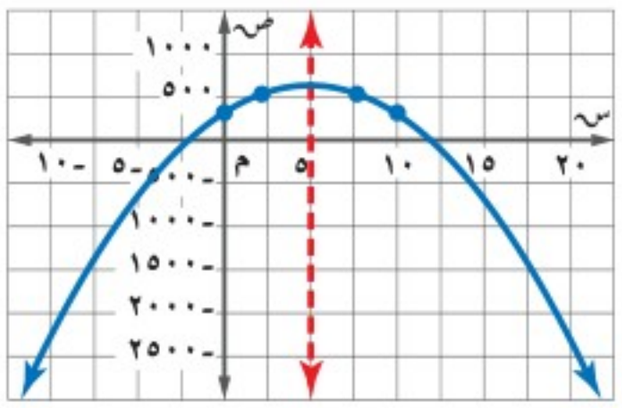
= $-١٣(٥)^{٢} + ١٣٠(٥) + ٣١٢$ — س = ٥

= $-٣٢٥ + ٦٥٠ + ٣١٢ = ٦٣٧$ — بسّط

الرأس هو (٥، ٦٣٧).

ولتجد نقطة أخرى، اختر س = ٠ وعوّض ذلك في الدالة الأصلية، فتكون النقطة الجديدة هي (٠، ٣١٢)، وتكون النقطة المقابلة لها على الطرف الآخر لمحور التماثل هي (١٠، ٣١٢).

كرّر هذه العملية واختر س = ٢ لتحصل على النقطة (٢، ٥٢٠)، وتكون النقطة المقابلة لها (٨، ٥٢٠)، ثم صل بين هذه النقاط بمنحنى.



ب) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الصاروخ؟

أُطلق الصاروخ عندما كان الزمن صفرًا، أو عند المقطع الصادي للدالة، أيْ من على ارتفاع ٣١٢ قدمًا عن الأرض.

جـ) ما أقصى ارتفاع يصله الصاروخ؟

القيمة العظمى للارتفاع تقع عند الرأس؛ لذا يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع له ٦٣٧ قدمًا بعد خمس ثوانٍ من بدء الانطلاق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

٦) **رمي الرمح:** يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (ص) بالأقدام بعد (س) ثانية، بالمعادلة ص = −١٦س^{٢} + ٦٤س + ٦.

أ) مثّل مسار هذا الرمح بيانيًّا.

ب) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الرمح؟

جـ) ما أقصى ارتفاع يصله الرمح؟

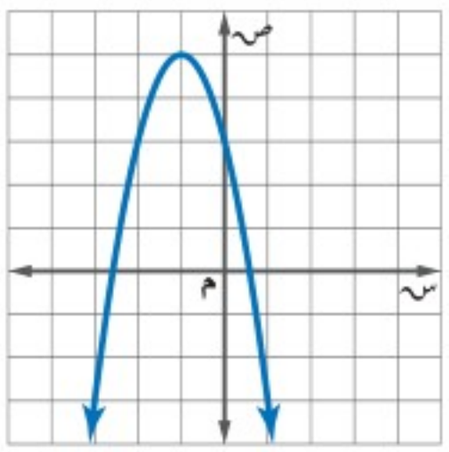
تأكد

مثال ١ استعمل جدول القيم، لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

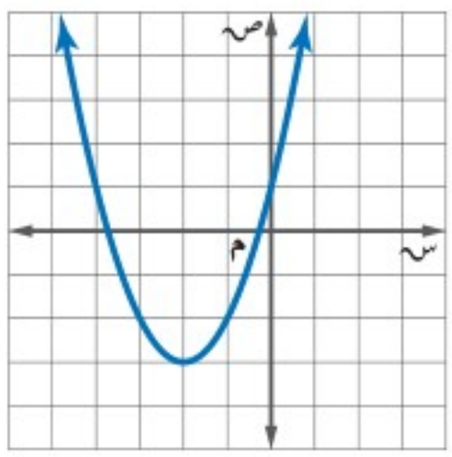
١) ص = ٢س^{٢} + ٤س − ٦ ٢) ص = س^{٢} + ٢س − ١ ٣) ص = ٣س^{٢} − ٦س − ٥

مثال ٢ أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

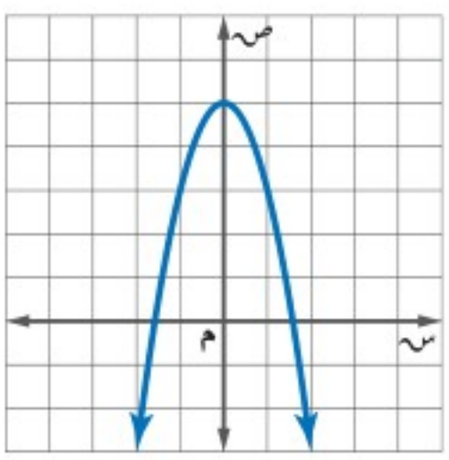
٤)



٥)



٦)



مثال ٣ أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

٧) ص = − س^{٢} + ٢س + ١ ٨) ص = س^{٢} − ٤س + ٥ ٩) ص = ٤س^{٢} − ٨س + ٩

مثال ٤ في الأسئلة ١٠-١٢ أجب عما يأتي:

أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أم قيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

جـ) حدِّد مجال الدالة ومداها.

١٠) ص = −س^{٢} − ٢س + ٢ ١١) ص = −٣س^{٢} + ٦س + ٣ ١٢) ص = −٢س^{٢} + ٨س − ٦

مثال ٥ مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

١٣) د(س) = −٣س^{٢} + ٦س + ٣ ١٤) د(س) = −٢س^{٢} + ٤س + ١ ١٥) د(س) = ٢س^{٢} − ٨س − ٤

مثال ٦ ١٦) **كرة:** يقذف ياسر كرة في الهواء، وفق المعادلة ص = −١٦س^{٢} + ١٦س + ٥ حيث تمثِّل (ص) ارتفاع الكرة بالأقدام بعد (س) ثانية.

أ) مثّل هذه الدالة بيانيًّا.

ب) ما الارتفاع الذي قُذفت منه الكرة؟

جـ) ما أقصى ارتفاع تصله الكرة من سطح الأرض؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

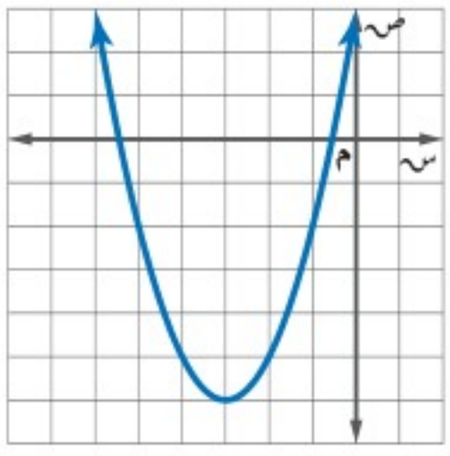
تدرب وحل المسائل

مثال ١ استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.

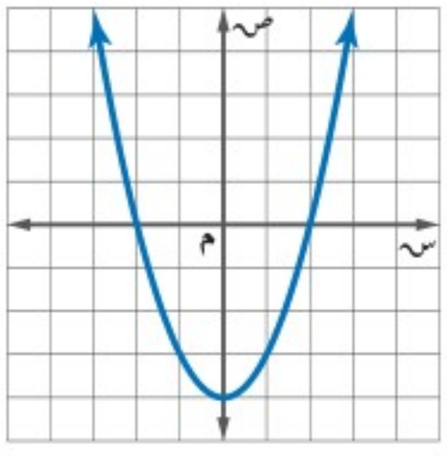
١٧) ص = س^{٢} + ٤س + ٦ ١٨) ص = ٢س^{٢} + ٤س + ٧ ١٩) ص = ٢س^{٢} − ٨س − ٥

مثال ٢ أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:

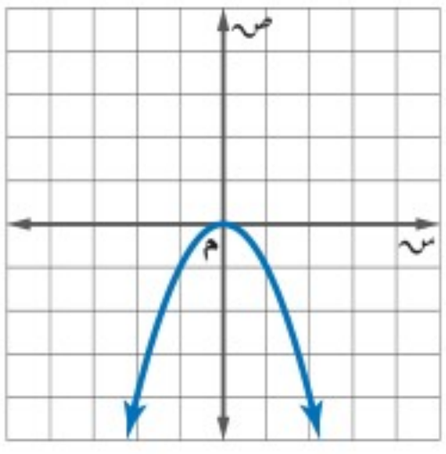
٢٠)



٢١)



٢٢)



مثال ٣ أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

٢٣) ص = س^{٢} + ٨س + ١٠ ٢٤) ص = ٢س^{٢} + ١٢س + ١٠ ٢٥) ص = −٣س^{٢} − ٦س + ٧

مثال ٤ في الأسئلة ٢٦-٢٨، أجب عما يأتي:

أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو قيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

جـ) حدِّد مجال الدالة ومداها؟

٢٦) ص = −٢س^{٢} − ٨س + ١ ٢٧) ص = س^{٢} + ٤س − ٥ ٢٨) ص = ٣س^{٢} + ١٨س − ٢١

مثال ٥ مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا:

٢٩) ص = −٣س^{٢} + ٦س − ٤ ٣٠) ص = −٢س^{٢} − ٤س − ٣ ٣١) ص = ٣س^{٢} − ١٢س + ٥

٣٢) **كرة قدم:** قذف حارس المرمى الكرة من مستوى سطح الأرض إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٩٠ قدمًا في الثانية، والدالة ع = −١٦ن^{٢} + ٩٠ن تمثّل ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية.

أ) ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟

ب) متى تكون الكرة على ارتفاع ١٢٦ قدمًا؟

جـ) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟

الربط مع الحياة

عندما ينطلق الجسم أو الأداة في الهواء يسمى مقذوفًا، وقد يكون هذا الجسم أداة جامدة مثل الرمح، قرص، كرة، .... أو كائن حي مثل الوثب العالي، والوثب الطويل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٣٣) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة حل المعادلات التربيعية باستعمال جداول القيم.

أ) جبريًا: حدّد الدالة المرتبطة بكل معادلة فيما يأتي، ثم انسخ الجدول وأكمله.

المعادلة	الدالة المرتبطة	الأصفار
$س^{٢} - س = ١٢$		
$س^{٢} + ٨س = ٩$		
$س^{٢} = ١٤س - ٢٤$		
$س^{٢} + ١٦س = -٢٨$		

ب) بيانيًا: مثّل كل دالة مرتبطة باستعمال الحاسبة البيانية.

جـ) تحليليًا: استعمل قيم الجدول الموجودة على حاسبتك لتحديد أصفار كل دالة مرتبطة، ثم اكتب الأصفار في الجدول أعلاه.

د) لفظيًا: وضح العلاقة بين عدد حلول المعادلة وأصفار الدالة المرتبطة بها؟

إرشادات للدراسة

الأصفار

عدد أصفار الدالة يساوي درجة الدالة مع احتساب الجذر المكرر.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب دالة تربيعية معادلة محور التماثل لتمثيلها البياني هي $س = -\frac{٣}{٨}$، ملخصًا خطوات عملك.

٣٥) **اكتشف الخطأ:** تحاول عبير ومنى إيجاد محور التماثل للقطع المكافئ، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

منى

$ص = -س^{٢} - ٤س + ٦$

$س = -\frac{ب}{٢أ}$

$س = -\frac{٤}{٢(-١)}$

$س = ٢$

عبير

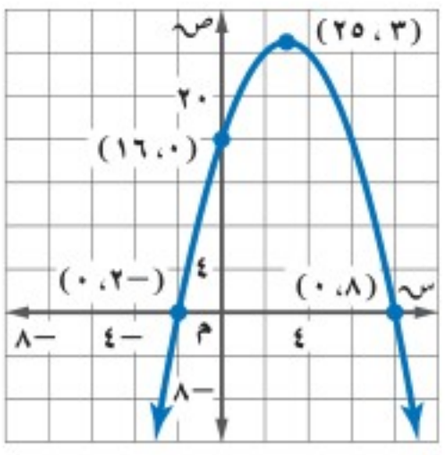
$ص = -س^{٢} - ٤س + ٦$

$س = -\frac{ب}{٢أ}$

$س = -\frac{-٤}{٢(-١)}$

$س = -٢$

٣٦) **تحدٍّ:** اكتب معادلة التمثيل البياني المجاور باستعمال محور التماثل وأحد المقطعين السينيين.



٣٧) **تبرير:** إذا كان رأس قطع مكافئ هو النقطة (٢، ٠)، وإحدى نقاطه (٥، ٩)، فأوجد نقطة أخرى عليه، واشرح طريقة إيجادها.

٣٨) **اكتب:** وضّح كيفية إيجاد محور التماثل لمعادلة الدالة التربيعية، ثم فسّر الخصائص الأخرى للتمثيل البياني التي يمكنك اشتقاقها منه، وكيف توصَّلت إليها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدريب على اختبار

٣٩) هندسة: دائرة مساحتها ٣٦ط وحدة مربعة، إذا زاد نصف قطرها إلى مثليه، فكم تصبح مساحة الدائرة الجديدة؟

أ) ٧٢ط وحدة مربعة
ب) ١٤٤ط وحدة مربعة
جـ) ١٢٩٦ط وحدة مربعة
د) ٩ط وحدة مربعة

٤٠) ما مدى الدالة د (س) = $-٤س^{٢} - \frac{١}{٢}$؟

أ) جميع الأعداد الصحيحة التي تقل عن أو تساوي $\frac{١}{٢}$

ب) جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة

جـ) جميع الأعداد الحقيقية

د) جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي $-\frac{١}{٢}$

مراجعة تراكمية

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكِّل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها: (الدرس ٧-٦)

٤١) $٤س^{٢} + ٤س + ١$

٤٢) $٤س^{٢} - ٢٠س + ٢٥$

٤٣) $٩س^{٢} + ٨س + ١٦$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد المقطع السيني للتمثيل البياني لكل معادلة فيما يأتي:

٤٤) س + ٢ص = ١٠

٤٥) ٢س − ٣ص = ١٢

٤٦) ٣س − ص = −١٨

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٨-١ معدل التغير في الدالة التربيعية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

أُطلق نموذج صاروخ من الأرض إلى الأعلى بسرعة ١٤٤ قدمًا/ ثانية، والدالة ص= −١٦س^{٢}+ ١٤٤ س تمثّل ارتفاع الصاروخ (ص) بعد (س) ثانية، يمكنك استقصاء معدل التغير في ارتفاع الصاورخ باستعمال الدالة التربيعية.

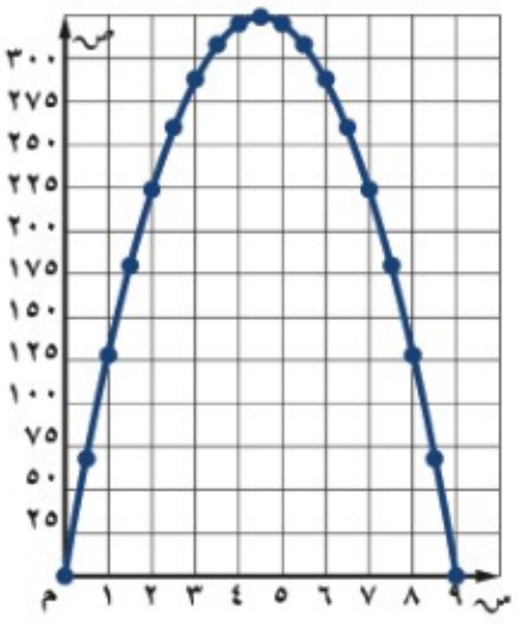
نشاط

الخطوة ١: انسخ الجدول أدناه.

س	٠	٠,٥	١,٠	١,٥	...	٩,٠
ص	٠					
معدل التغير	—					

الخطوة ٢: أوجد قيمة ص عند كل قيمة من قيم س من ٠ إلى ٩.

الخطوة ٣: مثّل الأزواج المرتبة (س، ص) على ورقة مربعات، ثم صل بين النقاط بمنحنى، ولاحظ أن الدالة تتزايد عندما ٠ < س < ٤,٥، وتتناقص عندما ٤,٥ < س < ٩.



الخطوة ٤: تذكر أن معدل التغير هو التغير في ص مقسومًا على التغير في س، أوجد معدل التغير عند كل فترة طولها نصف ثانية.

تمارين

استعمل الدالة التربيعية ص = س^{٢}

١) أنشئ جدولاً للدالة مشابهًا للجدول الوارد في النشاط مستعملاً قيم س: −٤، −٣، −٢، −١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ثم أوجد قيم ص عند كل قيمة من قيم س.

٢) مثّل بيانيًّا الأزواج المرتبة على ورقة مربعات، وصِلْ بين النقاط بمنحنى، ثم صف تزايد الدالة وتناقصها.

٣) أوجد معدل التغير في كل عمود بدءًا من س= −٣، وقارن بين معدلات التغير عندما تتزايد الدالة، وعندما تتناقص.

٤) **تحدَّ:** إذا أُسقِطَ جسم من ارتفاع ١٠٠ قدم في الهواء فإنه يسقط بمعدل يمكن تمثيله بالدالة د (س) = −١٦ س^{٢}+ ١٠٠ مع تجاهل مقاومة الهواء، حيث تمثّل د (س) ارتفاع الجسم بالأقدام بعد (س) ثانية، أنشئ جدولاً للقيم كما في الجدول الوارد في تمرين ١، واختر قيمًا مناسبة لـ (س)، وأكمل الجدول بقيم س، ص ومعدلات التغير، ثم قارن بين هذه المعدلات، وصف الأنماط التي تلاحظها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

حل المعادلات التربيعية بيانيًّا

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل.

والآن

- أحل المعادلات التربيعية بيانيًّا.
- أقدّر حلول المعادلات التربيعية من تمثيلها البياني.

المفردات

الجذر المكرّر

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا ؟

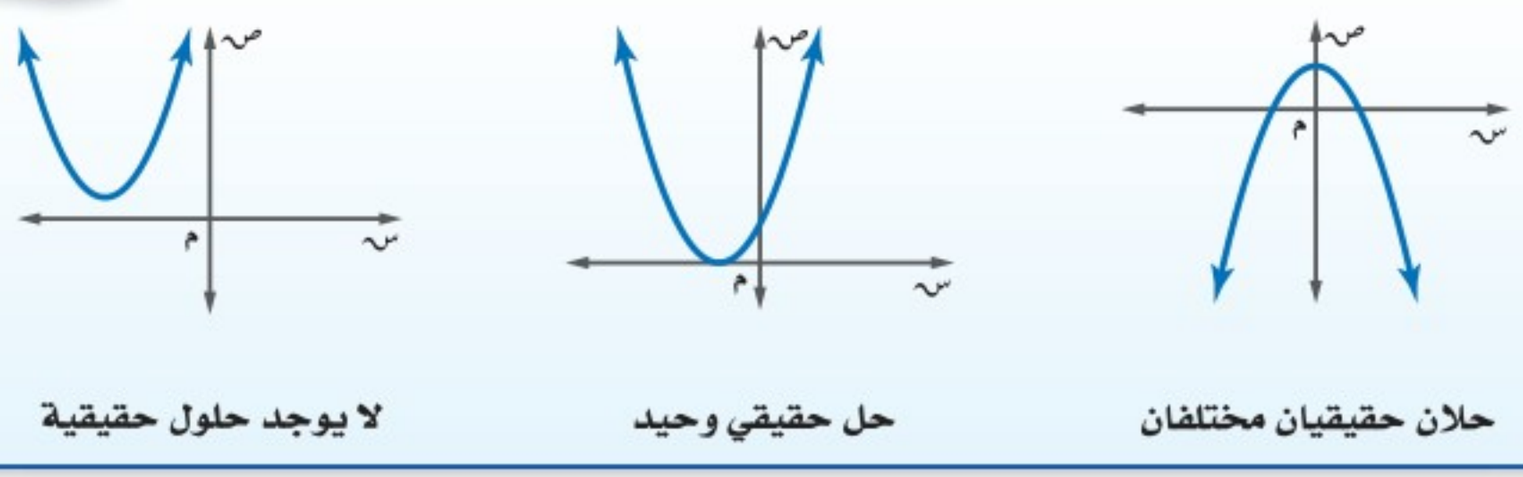
يعبّر عن المسار المنحني لكرة قدم رُكلت داخل ملعب بالدالة ص = −س^{٢} + ١٨س؛ حيث (س) المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة بالأمتار، (ص) ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض بالأمتار.

ويمكن استعمال المقاطع السينية للتمثيل البياني لهذه الدالة لتحديد المسافة الأفقية التي ستقطعها الكرة حتى تلمس الأرض.

حل المعادلة التربيعية بالتمثيل البياني: الصورة القياسية للمعادلة التربيعية هي: أس^{٢}+ب س+ جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠، ولكتابة الدالة التربيعية على صورة معادلة، استبدل ص أو د (س) بصفر، وتذكّر أن حلول المعادلة أو جذورها يمكن تحديدها بإيجاد المقاطع السينية للتمثيل البياني للدالة المرتبطة، ويوجد للمعادلة التربيعية حلان حقيقيان أو حل حقيقي واحد، أو لا يوجد لها حلول حقيقية.

مفهوم أساسي — حلول المعادلات التربيعية

أضف إلى مطويتك

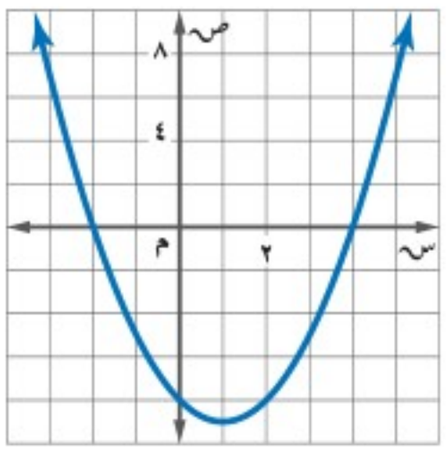


حلان حقيقيان مختلفان | حل حقيقي وحيد | لا يوجد حلول حقيقية

مثال ١ — جذران حقيقيان مختلفان

حل المعادلة س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠ بيانيًّا.

مثِّل الدالة د (س) = س^{٢} − ٢س − ٨ المرتبطة بالمعادلة بيانيًّا.



تظهر المقاطع السينية للتمثيل البياني عند −٢، ٤؛ لذا فالحلول هي −٢، ٤

تحقق: تحقّق من صحة كل حل بالتعويض في المعادلة الأصلية.

المعادلة الأصلية	س = −٢	س = ٤
س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠	س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠	س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠
(−٢)^{٢} − ٢(−٢) − ٨ ≟ ٠	(٤)^{٢} − ٢(٤) − ٨ ≟ ٠	
٠ = ٠ ✓	٠ = ٠ ✓	

تحقق من فهمك

١أ) −س^{٢} − ٣س + ١٨ = ٠ **١ب)** س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠

حلول المعادلة في مثال ١ عددان حقيقيان مختلفان، إلا أنه أحيانًا يكون الجذران هما العدد نفسه، ويُسمّى عندها **جذرًا مكرّرًا.**

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٢ جذر مكرر

حل المعادلة $س^{٢} - ٦س = -٩$ بيانيًّا.

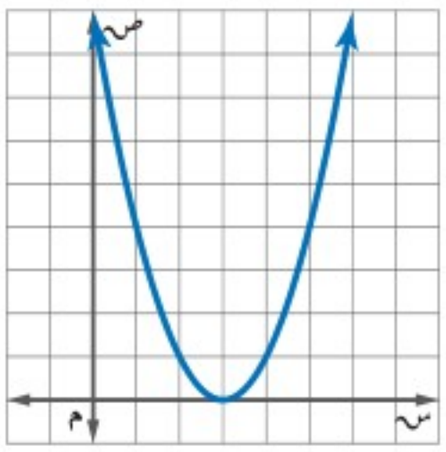
الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$س^{٢} - ٦س = -٩$ المعادلة الأصلية

$س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠$ أضف ٩ إلى كلا الطرفين.

الخطوة ٢: مثّل الدالة المرتبطة د (س) = $س^{٢} - ٦س + ٩$

الخطوة ٣: حَدِّد المقطع السيني للتمثيل البياني، ولاحظ أن رأس القطع المكافئ هو المقطع السيني الوحيد للدالة؛ لذا فإن للمعادلة حلًا وحيدًا هو ٣



تحقق: حل المعادلة بالتحليل إلى العوامل

$س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠$ المعادلة الأصلية

$(س - ٣)(س - ٣) = ٠$ حلّل إلى العوامل

$س - ٣ = ٠$ أو $س - ٣ = ٠$ خاصية الضرب الصفري

$س = ٣$ $س = ٣$ أضف ٣ إلى كلا الطرفين

الحل الوحيد هو ٣

تنبيه!

الحلول الدقيقة

قد تظهر الحلول التي نتوصل إليها من التمثيل البياني على أنها دقيقة، إلا أنه لا يمكنك التأكد من ذلك ما لم تتحقق منها في المعادلة الأصلية.

تحقق من فهمك

٢أ) $س^{٢} + ٢٥ = ١٠س$ **٢ب)** $س^{٢} = -٨س - ١٦$

كما أن هناك معادلات تربيعية ليس لها حلول حقيقية.

مثال ٣ لا يوجد جذور حقيقية

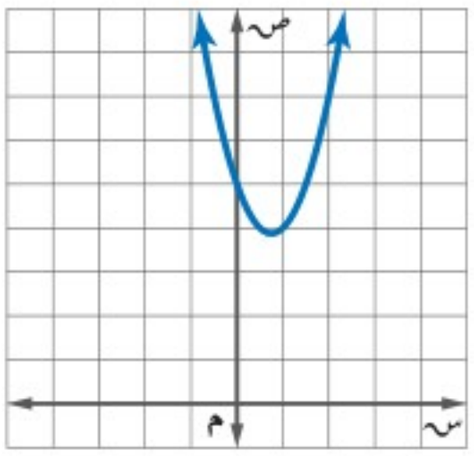
حل المعادلة $٢س^{٢} - ٣س + ٥ = ٠$ بيانيًّا.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

المعادلة مكتوبة بالصورة القياسية.

الخطوة ٢: مثّل الدالة المرتبطة د(س) = $٢س^{٢} - ٣س + ٥$.

الخطوة ٣: حدِّد المقطع السيني للتمثيل البياني للدالة. لاحظ أن التمثيل البياني ليس له مقطع سيني؛ لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية، وبالتالي فإن مجموعة الحل هي ∅.



تحقق: حُلّ المعادلة بالتحليل إلى العوامل.

لا يوجد عوامل للعدد ١٠ مجموعها −٣، لذا فالعبارة غير قابلة للتحليل إلى العوامل، أيْ أنه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

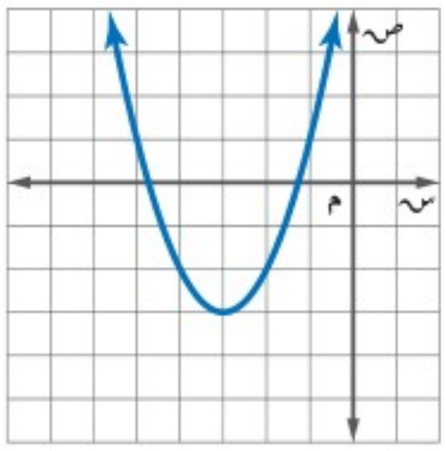
٣أ) $-س^{٢} - ٣س = ٥$ **٣ب)** $-٢س^{٢} - ٨ = ٦س$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تقدير الحلول: تمثّل الجذور التي وجدت للمعادلات السابقة أعدادًا صحيحة، إلا أن جذور المعادلات التربيعية ليست دائمًا كذلك، ويستعمل في هذه الحالات التقدير لإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلة.

مثال ٤ تقدير الجذور باستعمال الجدول

حُلَّ المعادلة س^{٢} + ٦س + ٦ = ٠ بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدِّرها إلى أقرب جزء من عشرة.



مثل الدالة المرتبطة د (س) = س^{٢} + ٦س + ٦ بيانيًّا.

يقع المقطعان السينيان بين −٥، −٤، وبين −٢، −١

أنشئ جدولاً بتدريج طوله ٠,١ لقيم س التي تقع بين −٥، −٤، وبين −٢، −١. وابحث عن التغير في إشارات قيم الدالة، وتُعد قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر هي التقريب الأفضل لصفر الدالة.

س	−٤,٩	−٤,٨	−٤,٧	−٤,٦	−٤,٥	−٤,٤	−٤,٣	−٤,٢	−٤,١
ص	٠,٦١	٠,٢٤	−٠,١١	−٠,٤٤	−٠,٧٥	−١,٠٤	−١,٣١	−١,٥٦	−١,٧٩

س	−١,٩	−١,٨	−١,٧	−١,٦	−١,٥	−١,٤	−١,٣	−١,٢	−١,١
ص	−١,٧٩	−١,٥٦	−١,٣١	−١,٠٤	−٠,٧٥	−٠,٤٤	−٠,١١	٠,٢٤	٠,٦١

بما أن قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر عند تغير الإشارة في كلا الجدولين هي − ١١ , ٠؛ لذا فإن الجذرين التقريبيين هما: −٧ , ٤، −٣ , ١.

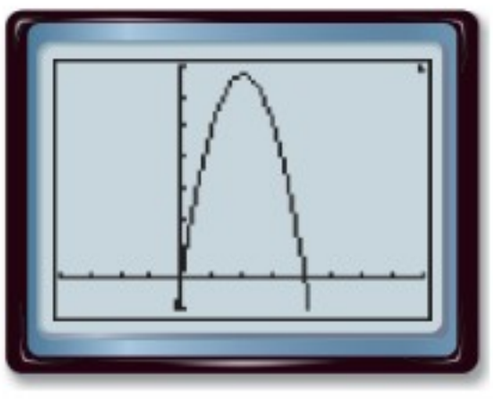
تحقق من فهمك

٤) حُل المعادلة ٢س^{٢} + ٦س − ٣ = ٠ بيانيًّا . وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة.

يُعدّ تقريب الجذور للدوال التربيعية مفيدًا في تطبيقات من واقع الحياة.

مثال ٥ من واقع الحياة تقدير الجذور باستعمال الحاسبة البيانية

ركل سعد الكرة بقدمه من ارتفاع قدم واحدة من الأرض إلى أعلى بسرعة ٦٥ قدمًا/ ثانية، وتمثل الدالة ع = −١٦ن^{٢} + ٦٥ ن + ١ ارتفاع الكرة (ع) بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟



لإيجاد جذور المعادلة −١٦ن^{٢} + ٦٥ن + ١ = ٠، استعمل الحاسبة البيانية في تمثيل الدالة المرتبطة د (ن) = −١٦ن^{٢} + ٦٥ن + ١.
بما أن المقطع السيني الموجب للتمثيل هو ٤ تقريبًا؛ لذا فإن الكرة بقيت ٤ ثوانٍ تقريبًا في الهواء.

تحقق من فهمك

٥) إذا ركل سعد الكرة من ارتفاع قدمين من الأرض إلى أعلى بسرعة ٥٥ قدمًا/ ثانية، فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟

إرشادات للدراسة

مواقع الأصفار

بما أن الدوال التربيعية دوال متصلة؛ لذا يجب أن يوجد صفر بين قيمتي س اللتين يقابلهما قيمتان متعاكستان في الإشارة من ص.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

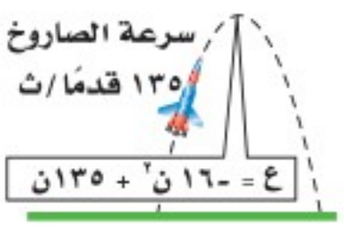
الأمثلة ١ - ٣ حُلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا:

١) $س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠$ ٢) $٢س^{٢} - ٨س = ٠$ ٣) $س^{٢} + ٤س = -٤$

مثال ٤ حُلَّ كلَّ معادلة فيما يأتي بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة ، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة:

٤) $-س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$ ٥) $-٩ = س^{٢}$ ٦) $س^{٢} = ٢٥$

مثال ٥ ٧) **معرض العلوم:** إذا صمّم نواف نموذجًا لصاروخ يمكنه أن ينطلق في الهواء وفق المعادلة المبيَّنة في الشكل، حيث (ع) ارتفاع الصاروخ بالأقدام بعد (ن) ثانية من انطلاقه، فكم يبقى الصاروخ في الهواء تقريبًا؟



تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣ حُلَّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا:

٨) $س^{٢} + ٧س + ١٤ = ٠$ ٩) $س^{٢} + ٢س - ٢٤ = ٠$ ١٠) $س^{٢} = ٢س - ١$

مثال ٤ حُلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة:

١١) $س^{٢} + ٢س - ٩ = ٠$ ١٢) $س^{٢} - ٤س = ٢٠$ ١٣) $س^{٢} + ٣س = ١٨$

مثال ٥ ١٤) **أفعوانية:** ترتفع أفعوانية براكبيها إلى الأعلى، ثم تنزل بهم إلى الأسفل وفق المعادلة:
$ع = -١٦ن^{٢} + ١٨٥ن$، حيث (ع) الارتفاع بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم ثانية تستغرق الأفعوانية للعودة إلى الأسفل؟

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي، ثم حدِّد أصفار كل منها:

١٥) $ص = س^{٢} - ٨س + ١٦$ ١٦) $ص = س^{٢} + ٣س + ٤$ ١٧) $ص = س^{٢} + ١٢س + ٣٢$

١٨) **نظرية الأعداد:** استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠.

١٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة كيفية تفسير العلاقة بين الدوال التربيعية وتمثيلاتها البيانية.

أ) بيانيًّا: مثّل الدالة $ص = س^{٢}$.

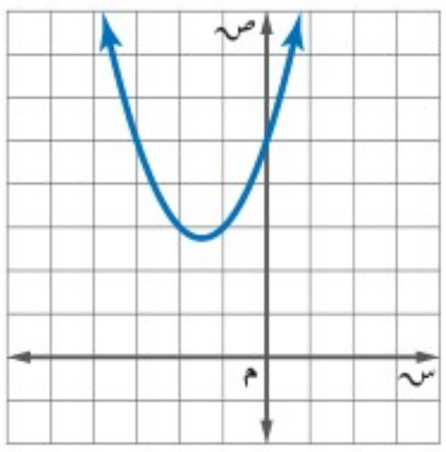
ب) تحليليًّا: اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على التمثيل.

جـ) بيانيًّا: مثّل الدوال $ص = س^{٢} + ٢$، $ص = س^{٢} + ٤$، $ص = س^{٢} + ٦$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي السابق نفسه.

د) تحليليًّا اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على كل من هذه التمثيلات التي لها الإحداثيات السينية نفسها. ماذا تستنتج؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مسائل مهارات التفكير العليا



٢٠) اكتشف الخطأ: يقوم معاذ وأحمد بإيجاد عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثَّلة بالشكل المجاور، فيقول معاذ إنه ليس لهذه الدالة أصفار حقيقية؛ لأنه لا يوجد لتمثيلها البياني مقاطع سينية. بينما يقول أحمد: إن لها صفرًا حقيقيًّا واحدًا؛ لأن للتمثيل البياني للدالة مقطعًا صاديًّا. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

٢١) مسألة مفتوحة: صف مسألة من واقع الحياة يتم فيها قذف جسم في الهواء، واكتب معادلة تمثّل ارتفاع الجسم بالنسبة للزمن، وحدّد الفترة الزمنية التي يمكثها الجسم في الهواء.

٢٢) تحدٍّ: اكتب معادلة تربيعية لها الجذور المذكورة في كل مما يأتي:

أ) جذر مكرر مرة واحدة.

ب) جذر نسبي (غير صحيح) واحد، وجذر صحيح واحد.

جـ) جذران صحيحان مختلفان ومتعاكسان جمعيًّا.

٢٣) اكتب: وضِّح كيف تقرّب جذور المعادلة التربيعية عندما لا تكون أعدادًا صحيحة.

تدريب على اختبار

٢٤) إذا حصل إبراهيم على الدرجة ٥٠ في اختبار درجته العظمى ٨٠. فما النسبة المئوية لدرجته في الاختبار؟

أ) ٦٢,٥٪ **جـ)** ١,٦٪

ب) ٦,٢٥٪ **د)** ٠,١٦٪

٢٥) تمثّل الصيغة ف = $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها جسم يسقط على كوكب سقوطًا حرًّا بعد (ن) ثانية. اكتب الصيغة بدلالة المتغير جـ، الذي يمثّل تسارع الجاذبية.

أ) جـ = $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} − ف **جـ)** جـ = ف − $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

ب) جـ = ٢ ف − ن^{٢} **د)** جـ = $\frac{٢ف}{ن^{٢}}$

مراجعة تراكمية

أوجد إحداثيات الرأس، ومعادلة محور التماثل، وبيِّن إذا كان الرأس يمثّل قيمة عظمى أم قيمة صغرى، ثم مثِّل الدالة بيانيًّا: (الدرس ٨-١)

٢٦) ص = ٣س^{٢} **٢٧)** ص = س^{٢} − ٦س − ٨ **٢٨)** ص = −٤س^{٢} − ٨س + ٥ **٢٩)** ص = ٣س^{٢} + ٢س + ١

حُلَّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقّق من صحة الحل: (الدرس ٧-٦)

٣٠) ٢س^{٢} = ٣٢ **٣١)** (س − ٤)^{٢} = ٢٥ **٣٢)** ٤س^{٢} − ٤س + ١ = ١٦ **٣٣)** ٢س^{٢} + ١٦س = −٣٢

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: حدِّد ما إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملًا، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلِّلها.

٣٤) ١٦س^{٢} − ٢٤س + ٩ **٣٥)** ٩س^{٢} + ٦س + ١ **٣٦)** ٢٥س^{٢} − ٦٠س + ٣٦

٣٧) س^{٢} − ٨س + ٨١ **٣٨)** ٣٦س^{٢} − ٨٤س + ٤٩ **٣٩)** ٤س^{٢} − ٣س + ٩

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل ٨ اختبار منتصف الفصل

الدرسان ٨-١ وَ ٨-٢

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها: (الدرس ٨-١)

١) ص = س^{٢} + ٣س + ١

٢) ص = ٢س^{٢} − ٤س + ٣

٣) ص = −س^{٢} − ٣س − ٣

٤) ص = −٣س^{٢} − س + ١

إذا كانت: ص = س^{٢} − ٥س + ٤ (الدرس ٨-١)

٥) اكتب معادلة محور التماثل.

٦) أوجد الرأس، وحدّد ما إذا كان يمثل نقطةً صغرى أو عظمى.

٧) مثِّل الدالة بيانيًّا.

٨) **كرة:** تم ركل كرة من على سطح الأرض بسرعة ٩٠ قدمًا/ ثانيةٍ، إذا كانت المعادلة: ع = −١٦ن^{٢} + ٩٠ن، تعبرِّ عن ارتفاع الكرة بعد ن ثانيةً من إطلاقها. (الدرس ٨-١)

أ) أوجد ارتفاع الكرة بعد ثانية من إطلاقها.

ب) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

جـ) متى يكون ارتفاع الكرة عن سطح الأرض مساويًا للصفر؟ وضِّح معنى ذلك.

٩) **اختيار من متعدد:** التمثيل البياني للدالة: ص = ٢س^{٢} − ٣س + ١ (الدرس ٨-١)

أ) مفتوحٌ إلى أعلى وله قيمة عُظْمَى.

ب) مفتوحٌ إلى أعلى وله قيمة صُغْرَى.

جـ) مفتوحٌ إلى أسفل وله قيمة عُظْمَى.

د) مفتوحٌ إلى أسفل وله قيمة صُغْرَى.

حُلّ كل معادلةٍ فيما يأتي بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحةً فقدِّرْها إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ: (الدرس ٨-٢)

١٠) س^{٢} + ٥س + ٦ = ٠

١١) س^{٢} + ٨ = −٦س

١٢) −س^{٢} + ٣س − ١ = ٠

١٣) س^{٢} = ١٢

١٤) **كرة البيسبول:** المعادلة: ع = −١٦ن^{٢} + ١٢٠ن، تمثل ارتفاع كرة البيسبول بعد ن ثانيةً من ضربها، أوجد الوقت الذي تبقى فيه الكرة في الهواء. (الدرس ٨-٢)

استعمل التحليل إلى عوامل؛ لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالةٍ ممَّا يأتي، ثم حدِّد أصفار كلٍّ منها: (الدرس ٨-٢)

١٥) ص = س^{٢} − ٣س + ٢

١٦) ص = س^{٢}

١٧) ص = س^{٢} + ٤س + ٤

١٨) ص = س^{٢} + س + ٣

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٨-٣ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أكتب العبارة التربيعية على صورة مربع كامل.
- أحل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

المفردات

إكمال المربع

لماذا ؟

يسدِّد لاعبو كرة السلة بعض كراتهم نحو المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة: ع = −٩س^{٢} + ١٨س + ٥، حيث تمثل (ع) ارتفاع الكرة بعد (س) ثانية. ويمكن إيجاد الزمن عند أي ارتفاع معطى للكرة ؛ فمثلًا لإيجاد الزمن عندما تكون الكرة على ارتفاع ٤ أمتار، نحتاج إلى حل المعادلة: ٤ = −٩س^{٢} + ١٨س + ٥ باستعمال طرق مختلفة منها طريقة إكمال المربع.

إكمال المربع: درست في الدرس ٧− ٦ حل معادلات تربيعية بإيجاد الجذر التربيعي لكل طرف منها، والتي تستعمل فقط إذا كان المقدار الواقع على الطرف الأيمن مربعًا كاملًا، أما في العبارات ثلاثية الحدود التربيعية التي تمثل مربعات كاملة والتي يكون معاملها الرئيس ١، فهناك علاقة بين **معامل الحد الذي يحتوي س** و**الحد الثابت**.

$$(س+٥)^{٢} = س^{٢} + ٢(٥)س + ٥^{٢}$$

$$= س^{٢} + ١٠ س + ٢٥$$

لاحظ أن $\left(\frac{١٠}{٢}\right)^{٢} = ٢٥$، ويمكن الحصول على الحد الثابت، بقسمة معامل الحد الذي يحتوي س على ٢، وتربيع الناتج، يمكن استعمال هذه الفكرة في تحويل أي عبارة تربيعية على الصورة

س^{٢} + ب س إلى مربع كامل باستعمال طريقة تُسمى **إكمال المربع**.

مفهوم أساسي — إكمال المربع

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة س^{٢} + ب س، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة ١ : أوجد نصف ب (معامل س)

الخطوة ٢ : ربّع الناتج في الخطوة١ .

الخطوة ٣ : أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى س^{٢} + ب س، ثم اكتب العبارة على صورة مربع كامل.

الرموز: $س^{٢} + ب س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} = \left(س + \frac{ب}{٢}\right)^{٢}$

مثال ١ — إكمال المربع

أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود: س^{٢} + ٤س + جـ مربعًا كاملًا.

الطريقة ١ : استعمال بطاقات الجبر.

إذن جـ = ٤

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إرشادات للدراسة

الخوارزمية

الخوارزمية هي سلسلة خطوات لإجراء عملية أو لحل مسألة.

الطريقة ٢ : استعمال خوارزمية إكمال المربع.

الخطوة ١ : أوجد $\frac{١}{٢}$ العدد ٤. $\frac{٤}{٢} = ٢$

الخطوة ٢ : ربّع الناتج من الخطوة ١. $٢^{٢} = ٤$

الخطوة ٣ : أضف الناتج من الخطوة٢ إلى $س^{٢} + ٤س$. $س^{٢} + ٤س + ٤$

إذن، جـ = ٤، لاحظ أن $س^{٢} + ٤س + ٤ = (س + ٢)^{٢}$.

تحقق من فهمك

١) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود $ر^{٢} - ٨ر +$ جـ مربعًا كاملًا.

حل المعادلات بإكمال المربع: يمكن استعمال طريقة إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية، والتي تتطلب فَصل الحدين $س^{٢}$، ب س أولًا.

مثال ٢ **حل معادلة بإكمال المربع**

حُلَّ المعادلة: $س^{٢} - ٦س + ١٢ = ١٩$ بإكمال المربع.

$س^{٢} - ٦س + ١٢ = ١٩$	المعادلة الأصلية
$س^{٢} - ٦س = ٧$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين
$س^{٢} - ٦س + ٩ = ٧ + ٩$	بما أن $(\frac{-٦}{٢})^{٢} = ٩$؛ لذا أضف ٩ إلى كلا الطرفين
$(س - ٣)^{٢} = ١٦$	حلّل $س^{٢} - ٦س + ٩$
$س - ٣ = \pm ٤$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$س = ٣ \pm ٤$	أضف ٣ إلى كل طرف
$س = ٣ + ٤$ أو $س = ٣ - ٤$	افصل الحلين
$س = ٧$ أو $س = -١$	بسّط

إذن الحلان هما ٧، -١

تحقق من فهمك

٢) حل المعادلة: $س^{٢} - ١٢س + ٣ = ٨$ بإكمال المربع.

لحل معادلة تربيعية معاملها الرئيس لا يساوي ١، اقسم كل حد على هذا المعامل، ثم افصل الحدين اللذين يحتويان $س^{٢}$، س ثم أكمل المربع.

تنبيه !

المعامل الرئيس

تذكر أن المعامل الرئيس يجب أن يساوي ١ قبل إجراء عملية إكمال المربع.

مثال ٣ **معادلة فيها أ ≠ ١**

حل المعادلة: $-٢س^{٢} + ٨س - ١٨ = ٠$ بإكمال المربع.

$-٢س^{٢} + ٨س - ١٨ = ٠$

$\frac{-٢س^{٢} + ٨س - ١٨}{-٢} = \frac{٠}{-٢}$ اقسم كلا الطرفين على -٢

$س^{٢} - ٤س + ٩ = ٠$ بسّط

$س^{٢} - ٤س = -٩$ اطرح ٩ من كلا الطرفين

$س^{٢} - ٤س + ٤ = -٩ + ٤$ بما أن $(\frac{-٤}{٢})^{٢} = ٤$؛ لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين

$(س - ٢)^{٢} = -٥$ حلّل $س^{٢} - ٤س + ٤$

لا توجد أعداد حقيقية مربعاتها سالبة؛ لذا فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

٣) حُلّ المعادلة: $٣س^{٢} - ٩س - ٣ = ٢١$ بإكمال المربع.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الربط مع الحياة

يرتدي لاعبو فريق كرة القدم زيًّا موحدًا يشمل: القميص والبنطال والحذاء والجورب ويزيد حارس المرمى بالقفازات. ويختلف لون الزي والشعار تبعًا لكل فريق؛ للتمييز بينهم.

مثال ٤ من واقع الحياة — حل مسألة بإكمال المربع

زيّ رياضي: أراد أحد الفرق الرياضية شراء زيّ خاص بلاعبي كرة القدم، إذا أمكن تمثيل تكلفة الزي الرياضي بالمعادلة: ك = ٠,٢ س^{٢} + ٤,٨ س + ٣٥٠، حيث (ك) ثمن (س) قطعة من هذا الزي، فما عدد القطع التي يمكن شراؤها بمبلغ ٨٦٠ ريالًا؟

المبلغ الكلي ٨٦٠ ريالًا؛ لذا اجعل المعادلة تساوي ٨٦٠، ثم أكمل المربع.

٠,٢ س^{٢} + ٤,٨ س + ٣٥٠ = ٨٦٠	المعادلة الأصلية
$\frac{٠,٢ س^{٢} + ٤,٨ س + ٣٥٠}{٠,٢} = \frac{٨٦٠}{٠,٢}$	اقسم كل طرف على ٠,٢
س^{٢} + ٢٤ س + ١٧٥٠ = ٤٣٠٠	بسّط
س^{٢} + ٢٤ س + ١٧٥٠ − ١٧٥٠ = ٤٣٠٠ − ١٧٥٠	اطرح ١٧٥٠ من كلا الطرفين
س^{٢} + ٢٤ س = ٢٥٥٠	بسّط
س^{٢} + ٢٤ س + ١٤٤ = ٢٥٥٠ + ١٤٤	بما أن $(\frac{٢٤}{٢})^{٢}$ = ١٤٤؛ لذا أضف ١٤٤ إلى كلا الطرفين
س^{٢} + ٢٤ س + ١٤٤ = ٢٦٩٤	بسّط
(س + ١٢)^{٢} = ٢٦٩٤	حلّل س^{٢} + ٢٤ س + ١٤٤ إلى العوامل
س + ١٢ = ± $\sqrt{٢٦٩٤}$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
س = −١٢ ± $\sqrt{٢٦٩٤}$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين

استعمل الحاسبة لتقريب قيمتي س.

س = −١٢ + $\sqrt{٢٦٩٤}$ ≈ ٣٩,٩ أو س = −١٢ − $\sqrt{٢٦٩٤}$ ≈ −٦٣,٩ — افصل الحلين، أوجد القيم التقريبية

بما أنه لا يمكن أن نشتري عددًا سالبًا من القطع فالحل السالب غير معقول، إذن يمكن شراء ٣٩ قطعة من هذا الزي.

تحقق من فهمك

٤) إذا أمكن زيادة المبلغ إلى ٩٨٠ ريالًا، فما عدد قطع الزي التي يمكن شراؤها؟

تأكد

مثال ١ أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملًا:

١) س^{٢} − ١٨ س + جـ

٢) س^{٢} + ٢٢ س + جـ

٣) س^{٢} + ٩ س + جـ

٤) س^{٢} − ٧ س + جـ

المثالان ٢ ، ٣ حُلَّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

٥) س^{٢} + ٤ س = ٦

٦) س^{٢} − ٨ س = −٩

٧) ٤ س^{٢} + ٩ س − ١ = ٠

٨) −٢ س^{٢} + ١٠ س + ٢٢ = ٤

مثال ٤ ٩) **إنشاءات:** يبني إسماعيل صالة مستطيلة الشكل خلف منزل عائلته، مساحتها ١٤٤ مترًا مربعًا، وطولها يزيد على عرضها بمقدار ١٠ أمتار، فما بُعدا الصالة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملًا:

١٠) $س^{٢} + ٢٦س +$ جـ　　١١) $س^{٢} - ٢٤س +$ جـ　　١٢) $س^{٢} - ١٩س +$ جـ

١٣) $س^{٢} - ٢٢س +$ جـ　　١٤) $س^{٢} - ١٥س +$ جـ　　١٥) $س^{٢} - ١٣س +$ جـ

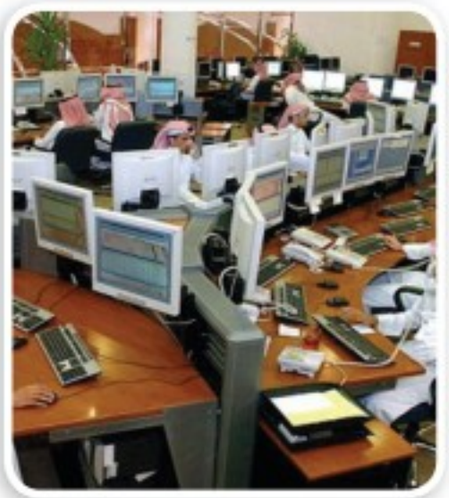
المثالان ٢ ، ٣ حُلَّ كلَّ معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

١٦) $س^{٢} + ٦س - ١٦ = ٠$　　١٧) $س^{٢} - ٢س - ١٤ = ٠$

١٨) $س^{٢} - ٨س - ١ = ٨$　　١٩) $س^{٢} + ٣س + ٢١ = ٢٢$

٢٠) $س^{٢} - ٢س + ٧ = ٥$　　٢١) $٣س^{٢} + ١٢س + ٨١ = ١٥$

مثال ٤



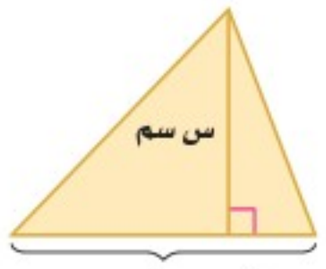
الربط مع الحياة

البضاعة التي ليس لها أصول حقيقية، بل أوراق أو أصول مالية تكون غالبًا أسهمًا وسندات، ويتم تداولها في سوق يُسمى سوق الأسهم، ولهذا السوق قواعد قانونية وفنية تحكم أداءه.

٢٢) **ثقافة مالية:** يمكن تمثيل سعر سهم معين (س) بالمعادلة التربيعية س = ٥ , ٣ن − ٠٥ , ٠ $ن^{٢}$، حيث (ن) عدد الأيام بعد شراء الأسهم، فمتى يصبح سعر السهم ٦٠ ريالًا؟

هندسة: أوجد قيمة س في كل شكل مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا: (م: المساحة)

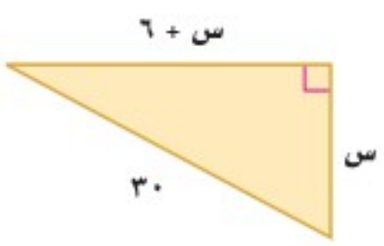
٢٣) م = ٤٥ $سم^{٢}$



٢٤) م = ١١٠ $سم^{٢}$

٢٥) **نظرية الأعداد:** عددان صحيحان زوجيان متتاليان ناتج ضربهما ٢٢٤، فما هما؟

٢٦) **هندسة:** أوجد مساحة المثلث المجاور.



٢٧) **علم الفلك:** يُعبَّر عن ارتفاع جسم بعد ثانية من سقوطه بالمعادلة ل = $\frac{١}{٢}$جـ $ن^{٢}$ + ل. ، حيث (ل.) الارتفاع الابتدائي، (جـ) التسارع الناتج عن الجاذبية، فإذا كان تسارع الجاذبية على سطح كوكب المريخ ٣,٧٣م/ $ث^{٢}$ ، وعلى سطح الأرض ٨ , ٩م/ $ث^{٢}$ ، وسقط الجسم من ارتفاع ابتدائي مقداره ١٢٠ مترًا فوق سطح كلّ من الكوكبين، فأجب عن السؤالين الآتيين:

أ) أيّ الكوكبين يصل الجسم إلى سطحه أولًا؟

ب) كم يستغرق الجسم للوصول إلى سطح كل من الكوكبين مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة؟

٢٨) أوجد قيمة جـ التي تجعل ثلاثية الحدود: $س^{٢}$ + جـ س + ٢٢٥ مربعًا كاملًا .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٢٩) **رسم:** إذا كان لدى أحمد إطار طوله ٦٠ بوصة، وعرضه ٤ بوصات، ويرغب في زيادة بُعدي الإطار على أن تكون الزيادة في الطول تعادل ١٠ أمثال الزيادة في العرض؛ لتناسب قطعة قماش مساحتها ٤٨٠ بوصة مربعة. فما بُعدا الإطار الجديد؟

٣٠) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة خاصية للمعادلات التربيعية.

أ) جدوليًا: انسخ الجدول المجاور وأكمل العمود الثاني.

ثلاثية الحدود	ب^{٢} − ٤أجـ	عدد الجذور
س^{٢} − ٨س + ١٦	٠	١
٢س^{٢} − ١١س + ٣		
٣س^{٢} + ٦س + ٩		
س^{٢} − ٢س + ٧		
س^{٢} + ١٠س + ٢٥		
س^{٢} + ٣س − ١٢		

ب) جبريًا: اكتب كل ثلاثية حدود على صورة معادلة طرفها الأيمن يساوي صفر، وحلّها بإكمال المربع، وأكمل العمود الثالث في الجدول بكتابة عدد جذور كل معادلة.

جـ) لفظيًا: قارن عدد الجذور لكل معادلة بالنتيجة في العمود ب^{٢} − ٤أ جـ، وهل هناك علاقة بينهما؟ وإن كانت هناك علاقة فصفها.

د) تحليلياً: تنبأ بعدد حلول ٢س^{٢} − ٩س − ١٥ = ٠، وتحقق من صحة تنبُّئك بحلّ المعادلة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣١) **تحدٍّ:** اشتق معادلة محور التماثل بإكمال المربع للمعادلة ص = أس^{٢} + ب س + جـ، أ ≠ ٠، وأعد كتابة المعادلة على الصورة ص = أ(س − هـ)^{٢} + ك.

٣٢) **تبرير:** حدّد عدد حلول المعادلة س^{٢} + ب س = جـ إذا كانت جـ < − $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$. فسّر إجابتك.

٣٣) حدّد العبارة التي تختلف عن العبارات الثلاث الأخرى. وفسّر إجابتك.

$ن^{٢} - ن + \frac{١}{٤}$	$ن^{٢} + ن + \frac{١}{٤}$	$ن^{٢} - \frac{٢}{٣}ن + \frac{١}{٩}$	$ن^{٢} + \frac{١}{٣}ن + \frac{١}{٩}$

٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية حلها الوحيد هو ٤.

٣٥) **اكتب:** قارن بين الطرق الآتية: إكمال المربع، التمثيل البياني، التحليل للعوامل التي تُستعمل لحل المعادلة: س^{٢} − ٥س − ٧ = ٠

تدريب على اختبار

٣٦) إذا كان طول مستطيل يساوي ثلاثة أمثال عرضه ومساحته ٧٥ سنتمترًا مربعًا، فما طوله؟

أ) ٢٥سم
ب) ١٥سم
جـ) ١٠سم
د) ٥سم

٣٧) **إجابة قصيرة:** يمكن تمثيل عدد سكان إحدى المدن بالمعادلة ص = ٢٢٠٠٠ + ١٢٠٠ن، حيث (ص) عدد السكان، (ن) عدد السنوات بعد عام ١٤٣٨هـ، ما عدد السنوات اللازمة بعد عام ١٤٣٨هـ ليصبح عدد سكانها ٢٨٠٠٠ نسمة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

اكتب كلًّا مما يأتي في أبسط صورة، مفترضًا أن المقام لا يساوي صفرًا: (الدرس ٦-٢)

٣٨) $\frac{أ^{٦}}{أ^{٣}}$ ٣٩) $\frac{٤^{٧}}{٤^{٥}}$ ٤٠) $\frac{جـ^{٣}د^{٤}}{جـ د^{٧}}$

حل كلًّا من المتباينات الآتية: (الدرس ٥-٥)

٤١) $|٣ - ٢ص| \leq ٨$ ٤٢) $|٥ب - ٢| \geq ١٣$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

احسب قيمة $\pm\sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}$ في كلٍّ من الحالات الآتية:

٤٣) أ = ٢، ب = −٥، جـ = ٢ ٤٤) أ = ١، ب = ١٢، جـ = ١١

٤٥) أ = ٢، ب = −٤، جـ = −٦ ٤٦) أ = ٣، ب = ١، جـ = ٢

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٨-٤

حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

والآن

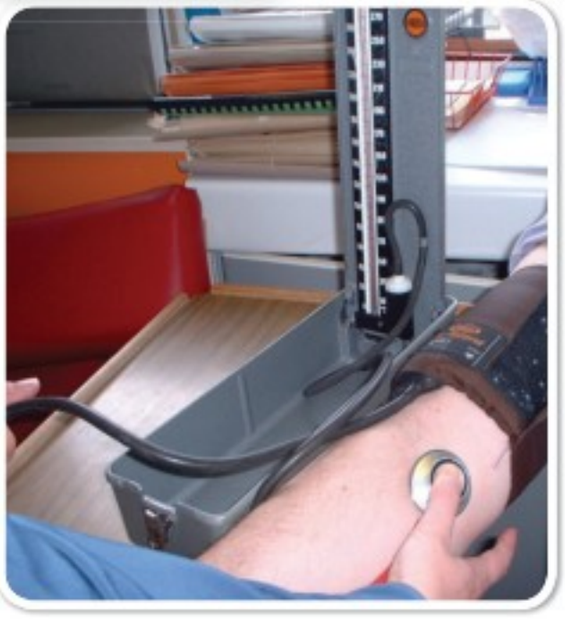
- أحلّ معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لتحديد عدد حلول معادلة تربيعية.

المفردات

القانون العام

المميز

لماذا ؟



يمكن تمثيل ضغط الدم الانقباضي الطبيعي (ص) بالملليتر زئبق للأنثى البالغة بالدالة: ص = ٠,٠١ س^{٢} + ٠,٠٥ س + ١٠٧، حيث (س) العمر بالسنوات، وتستعمل هذه الدالة لتقدير عمر الأنثى إذا عُلِم ضغط الدم الانقباضي لها، إلا أنه من الصعب حل المعادلة المرافقة لها بالتحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: ينتج عن إكمال المربع للمعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، صيغة نستعملها لحل أية معادلة تربيعية مكتوبة بالصيغة القياسية، وتُسمى هذه الصيغة **القانون العام**.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

القانون العام

حلّ المعادلة التربيعية: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠ يُعبّر عنه بالقانون العام:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

سيطلب إليك اشتقاق هذا القانون لاحقًا (في الدرس ٩- ١)

مثال ١ استعمال القانون العام

حل المعادلة: ٣س^{٢} + ٥س = ١٢ باستعمال القانون العام.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

٣ س^{٢} + ٥س = ١٢ — المعادلة الأصلية

٣ س^{٢} + ٥س − ١٢ = ٠ — اطرح ١٢ من كلا الطرفين

الخطوة ٢: طبّق القانون العام.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$ — القانون العام

$$= \frac{-(٥) \pm \sqrt{(٥)^{٢} - ٤(٣)(-١٢)}}{(٣)٢}$$ — أ = ٣، ب = ٥، جـ = −١٢

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ + ١٤٤}}{٦}$$ — اضرب

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{١٦٩}}{٦} = \frac{-٥ \pm ١٣}{٦}$$ — اجمع ثم أوجد الجذر التربيعي

$$س = \frac{-٥ - ١٣}{٦}$$ أو $$س = \frac{-٥ + ١٣}{٦}$$ — افصل الحلين

$$س = -٣ \qquad = \frac{٤}{٣}$$ — بسّط

الحلان هما −٣ وَ $\frac{٤}{٣}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

١أ) $٢س^{٢} + ٩س = ١٨$. **١ب)** $٤س^{٢} - ٢٤س + ٣٥ = ٠$

عند تطبيقك القانون العام لحل المعادلات التربيعية قد تحتاج إلى تقريب بعض حلولها.

إرشادات للاختبار

الإجابات الدقيقة

العدد $\sqrt{١٠٢٥}$ في المثال ٢ غير نسبي؛ لذا فالآلة الحاسبة تعطي فقط قيمة تقريبية له، أما الإجابة الدقيقة في المثال ٢ فهي: $\frac{٥ \pm \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$ أما العددان $-١,٤$ ، $١,٩$ فقيمتان تقريبيتان.

مثال ٢ استعمال القانون العام

حُلِّ المعادلة $١٠س^{٢} - ٥س = ٢٥$ باستعمال القانون العام، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$١٠س^{٢} - ٥س = ٢٥$ — المعادلة الأصلية

$١٠س^{٢} - ٥س - ٢٥ = ٠$ — اطرح ٢٥ من كلا الطرفين

الخطوة ٢: طبّق القانون العام.

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ — القانون العام

$= \frac{-(-٥) \pm \sqrt{(-٥)^{٢} - ٤(١٠)(-٢٥)}}{(١٠)٢}$ — أ = ١٠، ب = −٥، جـ = − ٢٥

$= \frac{٥ \pm \sqrt{١٠٠٠ + ٢٥}}{٢٠} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$ — اضرب ثم اجمع

$= \frac{٥ - \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$ أو $س = \frac{٥ + \sqrt{١٠٢٥}}{٢٠}$ — افصل الحلين

$\approx -١,٤$ $\approx ١,٩$ — بسط

الحلان هما $-١,٤$ وَ $١,٩$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

٢) $٣س^{٢} - ٢س - ٩ = ٠$

يمكنك استعمال طرق مختلفة لحل المعادلات التربيعية. ولا توجد طريقة هي الأفضل دائمًا لحل أي مسألة.

مثال ٣ حُلَّ المعادلات التربيعية باستعمال طرق مختلفة

حل المعادلة: $س^{٢} - ٤س = ١٢$.

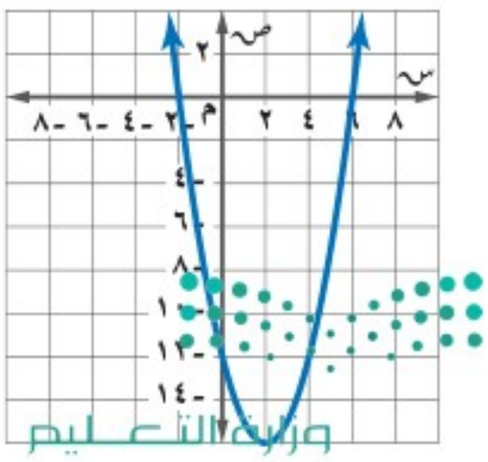
الطريقة ١: التمثيل البياني

أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$س^{٢} - ٤س = ١٢$ — المعادلة الأصلية

$س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$ — اطرح ١٢ من كلا الطرفين

مثّل الدالة المرتبطة د(س)= $س^{٢} - ٤س - ١٢$ بيانيًّا، وحدّد المقطعين السينيين على التمثيل.



الحلان هما −٢ ، ٦.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الطريقة ٢: التحليل إلى عوامل

$س^{٢} - ٤س = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$	اطرح ١٢ من كلا الطرفين
$(س - ٦)(س + ٢) = ٠$	حلّل
$س - ٦ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$س = ٦$ $\quad$ $س = -٢$	إيجاد قيم س

الطريقة ٣: إكمال المربع

المعادلة مكتوبة بالصورة المناسبة لإكمال المربع؛ لأن المعامل الرئيس يساوي ١، والحدين اللذين يحتويان $س^{٢}$، س تم فصلهما.

$س^{٢} - ٤س = ١٢$	المعادلة الأصلية
$س^{٢} - ٤س + ٤ = ١٢ + ٤$	بما أن $(\frac{-٤}{٢})^{٢} = ٤$، لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين
$(س - ٢)^{٢} = ١٦$	حلّل $س^{٢} - ٤س + ٤$.
$س - ٢ = \pm ٤$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$س = ٢ \pm ٤$	أضف ٢ لكلا الطرفين
$س = ٢ + ٤$ أو $س = ٢ - ٤$	افصل الحلين
$= ٦$ $\quad$ $= -٢$	بسّط

الطريقة ٤: القانون العام

من الطريقة الأولى، الصورة القياسية للمعادلة هي: $س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$.

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$	القانون العام
$= \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤(١)(-١٢)}}{(١)٢}$	أ = ١، ب = −٤، جـ = −١٢
$= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ + ٤٨}}{٢}$	اضرب
$= \frac{٤ \pm \sqrt{٦٤}}{٢} = \frac{٤ \pm ٨}{٢}$	اجمع وبسّط
$س = \frac{٤ - ٨}{٢}$ أو $س = \frac{٤ + ٨}{٢}$	افصل الحلين
$= -٢$ $\quad$ $= ٦$	بسّط

تنبيه!

الحلول

لا يُعدّ نوع الطريقة المستعملة لحل المعادلة التربيعية مهمًّا، إذ إن جميع الطرق تُعطي الحل نفسه أو الحلول نفسها.

تحقق من فهمك

٣أ) $٢س^{٢} - ١٧س + ٨ = ٠$

٣ب) $٤س^{٢} - ٤س - ١١ = ٠$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

ويمكنك تلخيص طرق حل المعادلات التربيعية في ملخص المفهوم الآتي :

ملخص المفهوم — حل المعادلات التربيعية

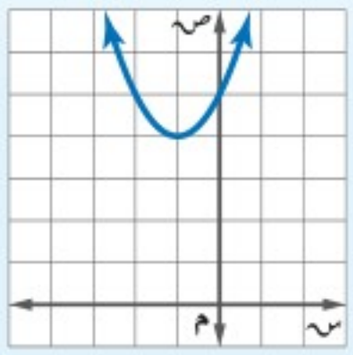
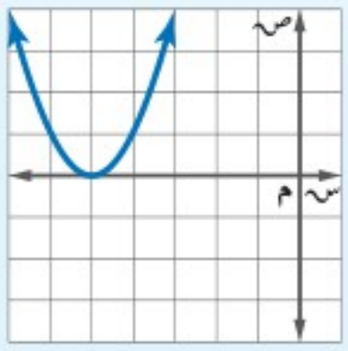
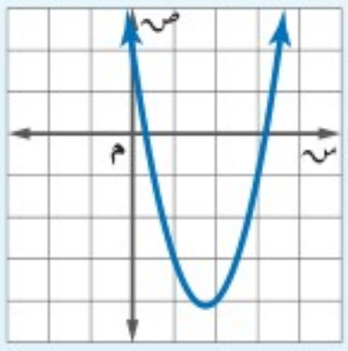
أضف إلى مطويتك

الطريقة	متى يُفضل استعمالها؟
التحليل إلى عوامل	تستعمل إذا كان الحد الثابت صفرًا، أو إذا كان من السهل تحديد العوامل فليست جميع المعادلات قابلة للتحليل.
التمثيل البياني	تستعمل عندما يكون الحل التقريبي مقبولًا.
استعمال خاصية الجذر التربيعي	تستعمل إذا كانت المعادلة مكتوبة على الصورة $س^{٢} = ن$ أو $س^{٢} = (س - هـ)$
إكمال المربع	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$، إلا أنه من الأسهل استعمالها إذا كان ب عددًا زوجيًّا وَ أ = ١.
القانون العام	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$.

المميز: في القانون العام، تُسمى العبارة التي تحت الجذر $(ب^{٢} - ٤ أ جـ)$ **المميز**، ويمكنك استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.

مفهوم أساسي — استعمال المميز

أضف إلى مطويتك

المعادلة	$س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠$	$س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠$	$٢س^{٢} - ٧س + ٢ = ٠$
المميز	$ب^{٢} - ٤ أ جـ = -١٦$ سالب	$ب^{٢} - ٤ أ جـ = ٠$ صفر	$ب^{٢} - ٤ أ جـ = ٣٣$ موجب
تمثيل الدالة المرتبطة	 عدد المقاطع السينية = ٠	 عدد المقاطع السينية = ١	 عدد المقاطع السينية = ٢
عدد الحلول الحقيقية	٠	١	٢

إرشادات للدراسة

المميز:
تذكر أنه إذا كان الطرف الأيمن في الصورة القياسية لثلاثي حدود من الدرجة الثانية مربعًا كاملاً فهناك حل واحد، ويكون المميز صفرًا.

مثال ٤ — استعمال المميز

أوجد قيمة المميز للمعادلة: $٤س^{٢} - ٥س = -٣$، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية: $٤س^{٢} - ٥س = -٣$ ← $٤س^{٢} - ٥س + ٣ = ٠$

الخطوة ٢: أوجد المميز.

$ب^{٢} - ٤ أ جـ = (-٥)^{٢} - ٤(٤)(٣)$ $\quad أ = ٤، ب = -٥، جـ = ٣$

$= -٢٣$

بما أن المميز سالب فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

٤أ) $٢س^{٢} + ١١س + ١٥ = ٠$ **٤ب)** $٩س^{٢} - ٣٠س + ٢٥ = ٠$

بقعة
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

المثالان ١ ، ٢ حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

١) $س^٢ - ٢س - ١٥ = ٠$ ٢) $س^٢ - ٨س = -١٠$ ٣) $٥س^٢ + ٥ = -١٣س$

مثال ٣ حُلّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

٤) $٢س^٢ + ١١س - ٦ = ٠$ ٥) $٢س^٢ - ٣س - ٦ = ٠$ ٦) $٩س^٢ = ٢٥$

مثال ٤ أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدِّد عدد حلولها الحقيقية:

٧) $س^٢ - ٩س + ٢١ = ٠$ ٨) $٩س^٢ + ٢٤س = -١٦$ ٩) $٣س^٢ - س = ٨$

١٠) **منصّة القفز:** يقفز خالد من فوق منصة القفز، حيث تمثل المعادلة $ل = -١٦ن^٢ + ٤,٢ن + ٦$، ارتفاع خالد (ل) بعد (ن) من الثواني، استعمل المميز لتحديد ما إذا كان خالد سيصل إلى ارتفاع ٢٠ قدمًا. فسّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢ حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

١١) $٤س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$ ١٢) $س^٢ + ١٦ = ٠$ ١٣) $٦س^٢ - ١٢س + ١ = ٠$

١٤) $٥س^٢ - ٨س = ٦$ ١٥) $٥س^٢ + ٢١س = -١٨$ ١٦) $٢س^٢ = ١٢س - ١٨$

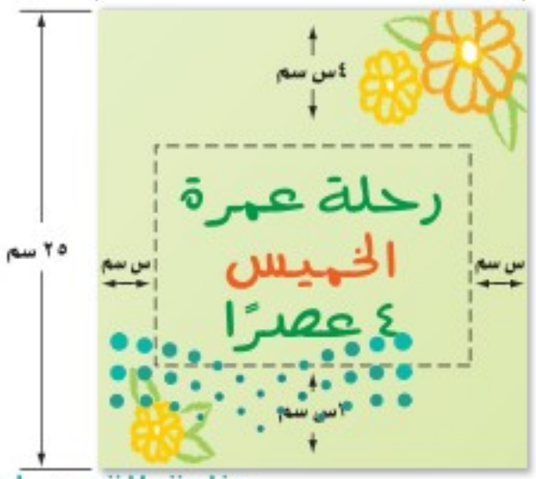
مثال ٣ حُلَّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

١٧) $٢س^٢ - ٨س = ١٢$ ١٨) $٣س^٢ - ٢٤س = -٣٦$ ١٩) $س^٢ - ٣س = ١٠$

مثال ٤ أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية:

٢٠) $س^٢ - \frac{٤}{٥}س = ٣$ ٢١) $٠,٥س^٢ - ٢س = -٢$ ٢٢) $٠,٢س^٢ - ١,٥س + ٢,٩ = ٠$

٢٣) **مرور:** تمثِّل المعادلة $ف = ٠,٠٠٧ع^٢ + ١٩,٠ع$ المسافة (ف) بالأمتار التي تقطعها سيارة تسير بسرعة (ع) كلم/ ساعة للتوقف تمامًا بعد استعمال المكابح، فإذا كانت حدود السرعة القصوى في أحد الشوارع ٨٠ كلم/ ساعة، وتوقفت سيارة منذر بعد ٥٥ مترًا من استعماله المكابح، فهل كانت سرعته تزيد على السرعة القصوى؟ فسّر تبريرك.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الربط بالحياة

بلغ عدد الحوادث المرورية في العام ١٤٣٨هـ أكثر من ٤٦٠ ألف حادث راح ضحيتها ٧٤٨٩ شخصًا. ومن أسباب الحوادث المرورية: القيادة في أثناء التعب والإرهاق، الانشغال عن القيادة، عدم التقيد بأنظمة المرور، التهور في القيادة، وعدم ربط حزام الأمان، وغيرها.

٢٤) **إعلان:** يعدّ راشد ملصقًا للإعلان عن رحلة عمرة، ويريد أن يغطي جزء من المساحة بنصوص كتابية.

أ) اكتب معادلة لمساحة القسم النصّي.

ب) حُلَّ المعادلة باستعمال القانون العام.

جـ) كم يجب أن تكون هوامش الملصق؟

حدّد دون استعمال التمثيل البياني عدد المقاطع السينية لكل دالة فيما يأتي:

٢٥) $٤,٢٥\ س + ٣ = -٣س^{٢}$ **٢٦)** $س^{٢} + \frac{٢}{٢٥} = \frac{٣}{٥} س$ **٢٧)** $٠,٢٥\ س^{٢} + س = -١$

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرِّبًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا:

٢٨) $-٢س^{٢} - ٧\ س = -١,٥$ **٢٩)** $٢,٣\ س^{٢} - ١,٤س = ٦,٨$ **٣٠)** $س^{٢} - ٢س = ٥$

٣١) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف الدوال الأسّيّة في هذه المسألة :

أ) جدوليًّا: انسخ الجدول الآتي وأكمله:

الزمن (ساعة)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد البكتيريا	$٢^{٠} = ١$	$٢^{١} = ٢$	$٢^{٢} = ٤$				

ب) بيانيًّا: مثّل المعلومات المعطاة في الجدول بيانيًّا باستعمال النقاط (الزمن، عدد البكتيريا)، وهل التمثيل خطي أم تربيعي أم غير ذلك؟

جـ) تحليليًّا: ماذا يحدث لعدد البكتيريا كل ساعة؟ اكتب دالة تمثّل هذا النمط.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٢) **تحدٍّ:** أوجد جميع قيم ك التي تجعل للمعادلة: "$٢س^{٢} - ٣س + ٥ك = ٠$" حلين حقيقيين.

تبرير: **بيّن فيما إذا كان عدد الحلول الحقيقية لكل مما يأتي حلان، أو حل واحد، أو لا يوجد حل :**

٣٣) التمثيل البياني لدالة تربيعية لا تحتوي على مقطع سيني.

٣٤) التمثيل البياني لدالة تربيعية تمس محور السينات.

٣٥) التمثيل البياني لدالة تربيعية تقطع محور السينات مرتين.

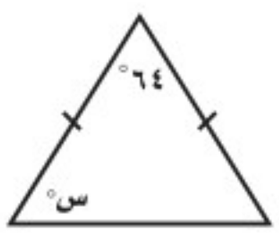
٣٦) قيمتا كل من أ، ب أكبر من صفر، وقيمة جـ أصغر من صفر في الصيغة القياسية للدالة التربيعية.

٣٧) **مسألة مفتوحة:** اكتب ٣ دوال تربيعية على أن يكون مميز الأولى موجب، ومميز الثانية سالبًا، ومميز الثالثة صفرًا.

٣٨) **اكتب:** وضّح طرق حل المعادلات التربيعية، وأعطِ مثالًا مختلفًا لكل طريقة. فسِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

٣٩) **إجابة قصيرة:** إذا علمت أن المثلث المجاور متطابق الضلعين، فما قيمة س؟



٤٠) ما حلول المعادلة التربيعية $٦هـ^{٢} + ٦هـ = ٧٢$؟

أ) ٣ أو -٤ **جـ)** لا يوجد حلول حقيقية

ب) -٣ أو ٤ **د)** ١٢ أو -٤٨

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًّا: (الدرس ٨- ٣)

٤١) $٦س^{٢} - ١٧س + ١٢ = ٠$ ٤٢) $س^{٢} - ٩س = -١٢$ ٤٣) $٤س^{٢} = ٢٠س - ٢٥$

لتكن ص = $س^{٢} - ٥س + ٤$. (الدرس ٨-١)

٤٤) اكتب معادلة محور التماثل.

٤٥) أوجد إحداثيات نقطة الرأس، وهل هي نقطة عظمى أم صغرى؟

٤٦) مثِّل الدالة بيانيًّا.

٤٧) حدِّد مجال الدالة ومداها.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي:

٤٨) $\sqrt{١٠٠}$ ٤٩) $\sqrt{\frac{٩}{١٦}}$ ٥٠) $\sqrt{٠,٠١}$

٥١) $\frac{\sqrt{٤٧}}{٣}$ ٥٢) $\frac{٢}{\sqrt{١٦٧}}$ ٥٣) $\sqrt{٨١٧}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدِّد مجالهما ومداهما:

١) ص= س^{٢} + ٢س + ٥ **٢)** ص= ٢س^{٢} − ٣س + ١

لتكن الدالة ص = س^{٢} − ٧س + ٦.

٣) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

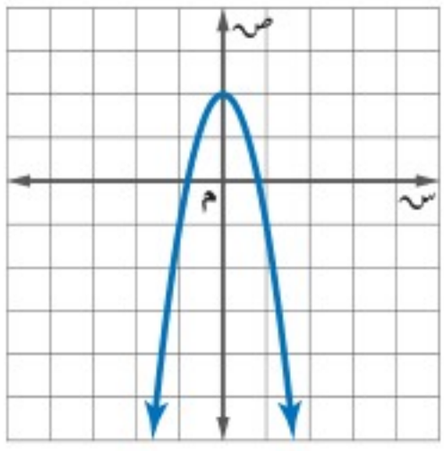
٤) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

٥) حدد مجال الدالة ومداها.

حُلّ كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

٦) س^{٢} + ٧س + ١٠ = ٠ **٧)** س^{٢} − ٥ = −٣س

٨) اختيار من متعدد: أيّ المعادلات الآتية تعبّر عن الدالة الممثلة بيانيًّا أدناه؟



أ) ص = −٣س^{٢} **جـ)** ص = س^{٢} + ٢

ب) ص = ٣س^{٢} + ١ **د)** ص = −٣س^{٢} + ٢

حُلَّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال إكمال المربع:

٩) س^{٢} − س − ٦ = ٠ **١٠)** ٢س^{٢} − ٣٦ = −٦س

حُلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام، مقرّبًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

١١) س^{٢} − س − ٣٠ = ٠ **١٢)** ٢س^{٢} + س − ١٥ = ٠

١٣) كرة سلة: سدَّد نواف كرة السلة نحو المرمى، وفق المعادلة ع= −١٦ن^{٢} + ٦٠ن + ٣٠، حيث تمثّل (ع) ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية، كم تبقى الكرة في الهواء؟

١٤) مثِّل الدالة: ص = ٣س^{٢} بيانيًّا، وأوجد المقطع الصادي، وحدد مجالها ومداها.

١٥) اختيار من متعدد: أي مما يلي يُعّد تحليلًا تامًّا للعبارة ٤ س^{٢} − ٨س − ١٢ إلى عواملها؟

أ) ٤ (س−٣) (س+١)

ب) (٤س+١٢) (س−١)

جـ) ٤ (س+٣) (س−١)

د) (س−٣) (٤س+٤)

١٦) أوجد مساحة المستطيل أدناه.

١٧) مثّل مجموعة الأزواج المرتبة الآتية بيانيًّا:
{(−٢، ٤)، (−١، ١)، (٠،٠)، (١،١)، (٢ ،٤)}، وحدّد فيما إذا كانت تمثّل دالة خطية أم تربيعية.

١٨) ابحث عن النمط في الجدول الآتي لتحديد أفضل نموذج دالة لوصف البيانات: خطية أم تربيعية. فسّر إجابتك.

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	١	٣	٥	٧	٩

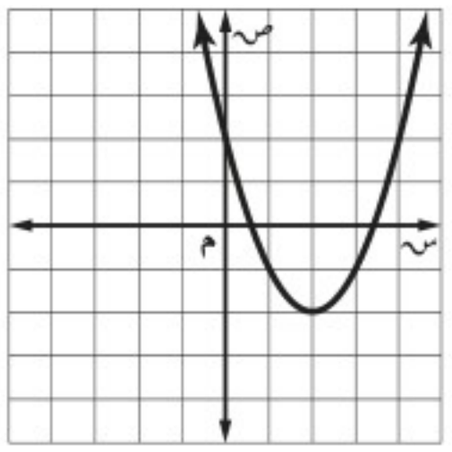
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) ما إحداثيا رأس القطع المكافئ الممثل أدناه؟

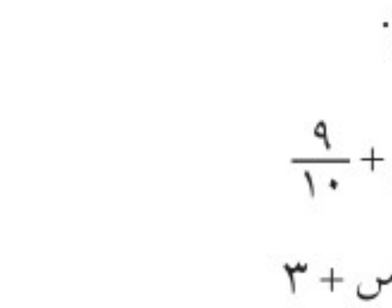


أ) (٢، ٠)
ب) (٠، ٢)
جـ) (-٢، ٢)
د) (٢، -٢)

٢) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{٩}{١٠}$ ومقطعه الصادي ٣ بصيغة الميل والمقطع.

أ) ص = ٣س + $\frac{٩}{١٠}$
ب) ص = $\frac{٩}{١٠}$ س + ٣
جـ) ص = $\frac{٩}{١٠}$ س - ٣
د) ص = ٣س - $\frac{٩}{١٠}$

٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه هي ٣س^{٢} + ١٩س - ١٤ وحدةً مربعةً، فكم وحدةً عرضه؟



أ) س + ٧
ب) س - ٧
جـ) س + ٢
د) س - ٢

٤) اكتب عبارة تمثل مساحة المستطيل أدناه.

أ) ١٠ب^{٥}جـ^{٥} - ٣ب جـ
ب) ١٠ب^{٥}جـ^{٥} - ١٥ب^{٢}جـ^{٣}
جـ) ٢ب^{٥}جـ^{٥} - ٣ب^{٢}جـ^{٣}
د) ١٠ب^{٤}جـ^{٦} - ١٥ب جـ^{٢}

٥) حل المعادلة التربيعية: س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠

أ) -١، ٤
ب) -٣، ٥
جـ) ٣، -٥
د) ∅

٦) ما قيمة ر التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين (-٤، ٨)، (ر، ١٢) يساوي $\frac{٤}{٣}$ ؟

أ) -٤
ب) -١
جـ) ٢
د) ٣

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

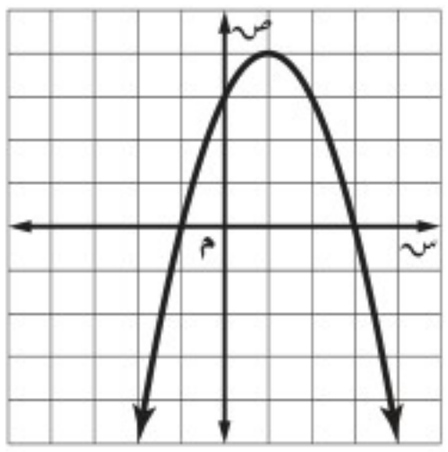
إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٧) استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$٢س^{٢} - ٦س + ٣ = ٠$$

٨) استعمل التمثيل البياني الآتي للمعادلة التربيعية للإجابة عن الأسئلة أدناه.



أ) ما إحداثيًّا الرأس؟

ب) ما إحداثيا نقطة التقاطع مع المحور الصادي؟

جـ) ما معادلة محور التماثل؟

٩) ثمن ٥ دفاتر و٣ أقلام ١٩,٥ ريالًا، وثمن ٤ دفاتر و٦ أقلام ٢١ ريالًا، استعمل هذه المعطيات في الإجابة عما يأتي:

أ) اكتب نظامًا من المعادلات يمثّل هذا الموقف.

ب) حل نظام المعادلات، ما ثمن كلٍّ من الدفتر والقلم؟

١٠) يبين الجدول الآتي الأجرة الكلية لقارب مدة (ن) ساعة.

عدد الساعات (ن)	الأجرة الكلية (جـ)
١	٤٥ ريالًا
٢	٧٠ ريالًا
٣	٩٥ ريالًا
٤	١٢٠ ريالًا

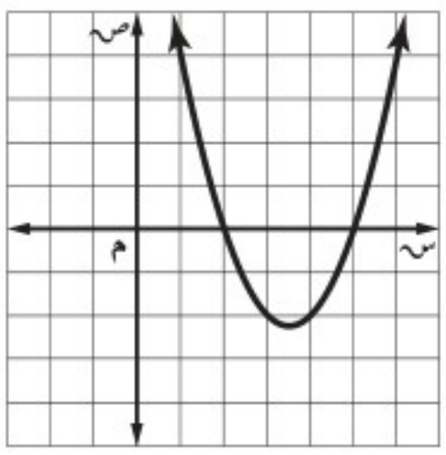
أ) اكتب دالة تمثّل هذا الموقف.

ب) ما أجرة القارب مدة ٧ ساعات؟

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل:

١١) استعمل الدالة وتمثيلها البياني للإجابة عن الأسئلة الآتية:



أ) حلّل العبارة $س^{٢} - ٧س + ١٠$ إلى عواملها الأولية.

ب) ما حلّ المعادلة: $س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$؟

جـ) ماذا تلاحظ على التمثيل البياني للدالة التربيعية؟ وأين يقطع تمثيلها محور السينات؟ وما العلاقة بين هذه القيم وحل المعادلة $س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$؟ فسّر إجابتك.

للمساعدة ..										
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
فراجع الدرس ..	١-٨	٢-٣	١-٦	٥-٦	٤-٨	٥-٢	٤-٨	١-٨	٤-٥	٦-٢	٣-٧

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل ٩
المعادلات الجذرية والمثلثات

فيما سبق

درستُ حل المعادلات التربيعية.

والآن

- أبسّط عبارات جذرية وأجمعها، وأطرحها، وأضربها.
- أحلّ معادلات جذرية.
- أستعمل نظرية فيثاغورس.
- أجد النسب المثلثية.

لماذا؟

المحيطات: يتكون التسونامي أو الموجات العالية من هزات أرضية تحت البحر. ويمكن استعمال معادلة جذرية لإيجاد سرعة التسونامي بالمتر لكل ثانية أو عمق المحيط بالأمتار.

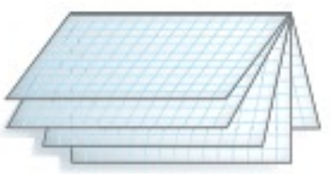
المفردات:

- إنطاق المقام ص (١٤٢)
- المعادلات الجذرية ص (١٥٢)
- الحلول الدخيلة ص (١٥٣)
- النسب المثلثية ص (١٧٥)

المطويات منظم أفكار

المعادلات الجذرية والمثلثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المعادلات الجذرية والمثلثات مبتدئًا بأربع أوراق مربعات.

١ **اطوِ** الأوراق من المنتصف عرضيًّا.



٢ **ثبّت** الأوراق معًا عند خط الطي.

٣ **سمّ** غلاف المطوية بعنوان الفصل، ثم اكتب كذلك عنوان كل درس في الفصل على كل صفحة من صفحاتها بدءًا من اليمين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل ٩

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

أوجد الجذر التربيعي لكل ممّا يأتي، مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر: (مهارة سابقة)

١) $\sqrt{٨٢}$ ٢) $\sqrt{٢٦}$

٣) $\sqrt{١٥}$ ٤) $\sqrt{٩٩}$

٥) **صندوق الرمل:** إذا صنع إسحاق صندوقًا رمليًّا قاعدته مربعة الشكل مساحتها ١٠٠ قدم مربعة. فما طول ضلع قاعدة الصندوق؟

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

٦) (٢١س + ١٥ص) − (٩س − ٤ص)

٧) ١٣س − ٥ص + ٢ص

٨) (١٠أ − ٥ب) + (٦أ + ٥ب)

٩) ٦م + ٥ن + ٤ − ٣م − ٢ن + ٦

حُلّ كل معادلة فيما يأتي: (الدرسان ٨ - ٣، ٨ - ٤)

١٠) $٢س^{٢} - ٤س = ٠$

١١) $٢س^{٢} + ٧س - ٥ = -١$

١٢) **هندسة:** إذا كانت مساحة المستطيل المجاور ٩٠ سم^{٢}، فما قيمة س؟

استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان الآتيتان تشكّلان تناسبًا، واكتب "نعم" أو "لا": (مهارة سابقة)

١٣) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ١٤) $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١٥}{٢٠}$

١٥) **خرائط:** إذا مَثَّلت مسافة ١٠ كلم سنتمترًا واحدًا على الخريطة، فما المسافة بين مدينتين على الخريطة إن كانت المسافة بينهما ٥٠ كلم؟

مراجعة سريعة

مثال ١

أوجد الجذر التربيعي للعدد ٥٠ مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

$\sqrt{٥٠} \approx ٧,٠٧١٠٦٧٨١٢....$ استعمل الحاسبة

وإلى أقرب جزء من مئة $\sqrt{٥٠} \approx ٧,٠٧$.

مثال ٢

بسّط العبارة: ٣ س + ٧ ص − ٤ س − ٨ص

٣س + ٧ص − ٤س − ٨ص العبارة الأصلية

= (٣س − ٤س) + (٧ص − ٨ص) اجمع الحدود المتشابهة

= − س − ص بسّط

مثال ٣

حُلّ المعادلة: $س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

$س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$ المعادلة الأصلية

(س − ٣) (س − ٢) = ٠ حلّل إلى العوامل

س − ٣ = ٠ أو س − ٢ = ٠ خاصية الضرب الصفري

س = ٣ س = ٢ حل كل معادلة

مثال ٤

استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان $\frac{٢}{٣}$ وَ $\frac{٨}{١٢}$ تشكّلان تناسبًا أم لا.

$\frac{٢}{٣} \stackrel{؟}{=} \frac{٨}{١٢}$ اكتب المعادلة

$٢(١٢) \stackrel{؟}{=} ٣(٨)$ اضرب تبادليًّا

٢٤ = ٢٤ ✓ بسّط

لذا، فهما تشكّلان تناسبًا.

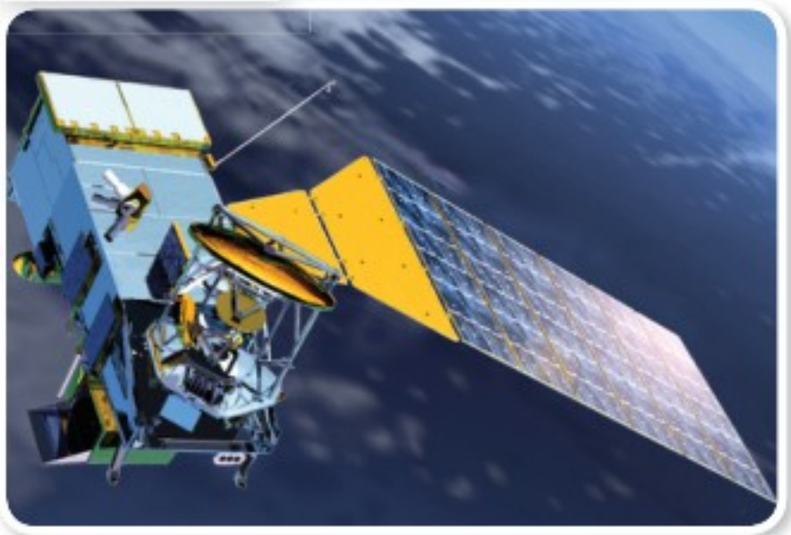
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

٩-١ تبسيط العبارات الجذرية

لماذا؟



تؤدي الأقمار الاصطناعية العديد من المهام، منها: دراسة الكون والتنبؤ بالطقس، والاتصالات بأنواعها، وتيسير الملاحة البحرية والجوية... إلى غير ذلك، حيث تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض، يمكن حسابها بالعلاقة:

ع = $\sqrt{\frac{٤ \times ١٠^{١٤}}{\text{نق}}}$ حيث تمثل (ع) السرعة المدارية للقمر الاصطناعي بوحدة المتر/ ثانية، (نق) نصف قطر المدار ويساوي بعد القمر عن مركز الأرض.

ويُذكر أن المملكة العربية السعودية أطلقت منظومة أقمار اصطناعية تجارية صغيرة يصل عددها إلى ٢٤ قمرًا.

خاصية ضرب الجذور التربيعية: تتضمن **العبارة الجذرية** جذرًا، كالجذر التربيعي مثلاً، وتكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط التالية في العبارة التي تحت الجذر:

- لا يكون أيٌّ من عوامله مربعًا كاملاً عدا ١.
- لا يتضمن كسورًا.
- لا يظهر أي جذر في مقام الكسر.

ويمكنك استعمال الخاصية الآتية لتبسيط الجذور التربيعية.

مفهوم أساسي — **خاصية ضرب الجذور التربيعية**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: الجذر التربيعي للمقدار أ ب لأي عددين حقيقيين غير سالبين أ ، ب، الجذر التربيعي للمقدار أ يساوي الجذر التربيعي للمقدار أ مضروبًا في الجذر التربيعي للمقدار ب.

الرموز: $\sqrt{أ ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$ ، إذا كانت أ ≥ ٠ ، ب ≥ ٠

أمثلة: $\sqrt{٩ \times ٤} = \sqrt{٩} \times \sqrt{٤} = ٣ \times ٢ = ٦$

مثال ١ — **تبسيط الجذور التربيعية**

بسّط العبارة : $\sqrt{٨٠}$.

$\sqrt{٨٠} = \sqrt{٥ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢}$ — حلّل ٨٠ إلى عوامله الأولية

$= \sqrt{٥} \times \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٢^{٢}}$ — خاصية ضرب الجذور

$= ٢ \times ٢ \times \sqrt{٥} = ٤\sqrt{٥}$ — بسّط

تحقق من فهمك

١أ) $\sqrt{٥٤}$

١ب) $\sqrt{١٨٠}$

فيما سبق

درست إيجاد الجذور التربيعية.

والآن

- أستعمل خاصية ضرب الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.
- أستعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.

المفردات

العبارة الجذرية

إنطاق المقام

المرافق

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٢ ضرب الجذور التربيعية

بسّط العبارة: $\sqrt{٢} \times \sqrt{١٤}$

$\sqrt{٢} \times \sqrt{١٤} = \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٧}$ خاصية ضرب الجذور

$= \sqrt{٢^{٢}} \times \sqrt{٧} = ٢\sqrt{٧}$ خاصية ضرب الجذور

تحقق من فهمك

٢أ) $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠}$ **٢ب)** $\sqrt{٦} \times \sqrt{٨}$

عند النظر إلى العبارة $\sqrt{س^{٢}}$ قد يبدو لك أن س = $\sqrt{س^{٢}}$، لذا عند إيجادك الجذر التربيعى الرئيس لعبارة تحتوي متغيرات، عليك التأكد من أن النتيجة ليست سالبة. فمثلاً، افرض أن س = −٣.

$\sqrt{س^{٢}} \stackrel{؟}{=}$ س

$\sqrt{(-٣)^{٢}} \stackrel{؟}{=} -٣$ عوّض عن س بـ(−٣)

$\sqrt{٩} \stackrel{؟}{=} -٣$ $(-٣)^{٢} = ٩$

$٣ \neq -٣$ $\sqrt{٩} = ٣$

عند تبسيط العبارات الجذرية، إذا كان ما تحت الجذر التربيعي متغير ذا أس زوجي، وناتج تبسيطه ذا أس فردي، يجب استعمال القيمة المطلقة والأمثلة التالية توضح ذلك.

$\sqrt{س^{٢}} = |س|$ $\sqrt{س^{٣}} = |س| \sqrt{س}$ $\sqrt{س^{٤}} = س^{٢}$ $\sqrt{س^{٦}} = |س^{٣}|$

مثال ٣ تبسيط الجذر التربيعي لمتغيرات

بسّط العبارة: $\sqrt{٩٠ س^{٣} ص^{٤} ك^{٥}}$.

$\sqrt{٩٠ س^{٣} ص^{٤} ك^{٥}} = \sqrt{٢ \times ٣^{٢} \times ٥ \times س^{٣} \times ص^{٤} \times ك^{٥}}$ حلّل إلى العوامل الأولية

$= \sqrt{٢} \times \sqrt{٣^{٢}} \times \sqrt{٥} \times \sqrt{س^{٢}} \times \sqrt{س} \times \sqrt{ص^{٤}} \times \sqrt{ك^{٤}} \times \sqrt{ك}$ خاصية ضرب الجذور

$= \sqrt{٢} \times ٣ \times \sqrt{٥} \times |س| \times \sqrt{س} \times ص^{٢} \times ك^{٢} \times \sqrt{ك}$ بسّط

$= ٣ ص^{٢} ك^{٢} |س| \sqrt{١٠ س ك}$ بسّط

تحقق من فهمك

٣أ) $\sqrt{٣٢ ر^{٢} ك^{٤} ت^{٥}}$ **٣ب)** $\sqrt{٥٦ س ص^{١٠} ك^{٥}}$

خاصية قسمة الجذور التربيعية: يمكنك استعمال خاصية قسمة الجذور التربيعية عند قسمة الجذور التربيعية وتبسيط العبارات الجذرية.

مفهوم أساسي خاصية قسمة الجذور التربيعية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين أ، ب، حيث أ ≥ صفر، ب > ٠، الجذر التربيعي للمقدار $\frac{أ}{ب}$ يساوي الجذر التربيعي للبسط أ مقسومًا على الجذر التربيعي للمقام ب.

الرموز: $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

قراءة الرياضيات

الكسور تحت الجذر

تُقرأ العبارة $\sqrt{\frac{أ}{ب}}$: الجذر التربيعي لِـ أ على ب، أو الجذر التربيعي للمقدار "أ على ب".

يمكنك استعمال خصائص الجذر التربيعي **لإنطاق المقام** وكتابته على صورة عدد نسبي إذا كان جذرًا، وهذا يتضمن ضرب كل من البسط والمقام في عامل يؤدي إلى حذف الجذر من المقام.

إرشادات للاختبار

تبسيط:
انظر أولاً إلى ما تحت الجذر إن كان يمكن تبسيطه؛ لأن ذلك يجعل حساباتك أبسط.

مثال ٤ من اختبار

أكتبِ العبارة $\frac{\sqrt{٣٥}}{١٥}$ في أبسط صورة.

أ) $\frac{\sqrt{٢١٥}}{١٥}$ ب) $\frac{\sqrt{٢١}}{٣}$ جـ) $\frac{\sqrt{٥٢٥}}{١٥}$ د) $\frac{\sqrt{٣٥}}{١٥}$

اقرأ الفقرة:

يجب تبسيط العبارة الجذرية.

حل الفقرة:

$\frac{\sqrt{٣٥}}{١٥} = \frac{\sqrt{٧}}{٣}$ بسّط الكسر

$= \frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٣}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ اضرب في $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

$= \frac{\sqrt{٢١}}{٣}$ خاصية ضرب الجذور

إذن البديل الصحيح هو ب

تحقق من فهمك

٤) بسّط العبارة : $\frac{\sqrt{٦ص}}{\sqrt{١٢}}$

كلٌّ من ثنائيتي الحد $أ\sqrt{ب} + جـ\sqrt{د}$ ، $أ\sqrt{ب} - جـ\sqrt{د}$ تُسمى **مرافقة** للأخرى حيث أ ، ب، جـ، د أعدادٌ نسبية، فعلى سبيل المثال $٢ + \sqrt{٧}$ وَ $٢ - \sqrt{٧}$ مترافقتان. حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد نسبي، ويمكن إيجاده باستعمال الفرق بين مربعين.

مثال ٥ استعمال المرافق في إنطاق المقام

بسّط العبارة : $\frac{٣}{\sqrt{٢} + ٥}$.

$\frac{٣}{\sqrt{٢} + ٥} = \frac{٣}{\sqrt{٢} + ٥} \times \frac{\sqrt{٢} - ٥}{\sqrt{٢} - ٥}$ مرافق $٥ + \sqrt{٢}$ هو $٥ - \sqrt{٢}$

$= \frac{٣(\sqrt{٢} - ٥)}{(\sqrt{٢})^{٢} - ٥^{٢}}$ $(أ-ب)(أ+ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$

$= \frac{٣\sqrt{٢} - ١٥}{٢ - ٢٥} = \frac{٣\sqrt{٢} - ١٥}{-٢٣}$ $(\sqrt{٢})^{٢} = ٢$

تحقق من فهمك

٥أ) $\frac{٣}{\sqrt{٢} + ٢}$ ٥ب) $\frac{٧}{\sqrt{٧} - ٣}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

الأمثلة ١-٣ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $\sqrt{٢٤}$ ٢) $٣\sqrt{١٦}$ ٣) $٢\sqrt{٢٥}$

٤) $\sqrt{١٠} \times \sqrt{١٤}$ ٥) $\sqrt{٣} \times \sqrt{١٨}$ ٦) $٣\sqrt{١٠} \times ٤\sqrt{١٠}$

٧) $\sqrt{٦٠ س^{٤} ص^{٧}}$ ٨) $\sqrt{٨٨ م^{٣} ب^{٢} ر^{٥}}$ ٩) $\sqrt{٩٩ أ ب^{٥} جـ^{٢}}$

مثال ٤ ١٠) **اختيار من متعدد:** بسّط العبارة $\frac{\sqrt{٤٥}}{١٠}$

أ) $\frac{٢\sqrt{٥}}{١٠}$ ب) $\frac{\sqrt{٤٥}}{١٠}$ جـ) $\frac{\sqrt{٥٠}}{١٠}$ د) $\frac{٢\sqrt{٣}}{٢}$

مثال ٥ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١١) $\frac{٣}{\sqrt{٥ + ٣}}$ ١٢) $\frac{٥}{\sqrt{٦ - ٢}}$ ١٣) $\frac{٢}{\sqrt{١٠ - ١}}$

١٤) $\frac{١}{\sqrt{١٢ + ٤}}$ ١٥) $\frac{٤}{\sqrt{٧ - ٦}}$ ١٦) $\frac{٦}{\sqrt{١١ + ٥}}$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٣ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١٧) $\sqrt{٥٢}$ ١٨) $\sqrt{٥٦}$ ١٩) $\sqrt{٧٢}$

٢٠) $٣\sqrt{١٨}$ ٢١) $\sqrt{٢٤٣}$ ٢٢) $\sqrt{٢٤٥}$

٢٣) $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٥}$ ٢٤) $٣\sqrt{٨} \times ٢\sqrt{٧}$ ٢٥) $٤\sqrt{٢} \times ٥\sqrt{٨}$

٢٦) $٣\sqrt{٢٥ ت^{٢}}$ ٢٧) $٥\sqrt{٨١ ك^{٥}}$ ٢٨) $\sqrt{٢٨ أ^{٢} ب^{٣}}$

٢٩) $\sqrt{٧٥ ك ر^{٣}}$ ٣٠) $٤\sqrt{٦٦ جـ^{٢} هـ^{٤}}$ ٣١) $\sqrt{٢ أ ب^{٢}} \times \sqrt{١٠ أ^{٥} ب}$

الربط مع الحياة

صدر الأمر الملكي في عام ١٣٤٦هـ بإنشاء أول فرقة إطفاء في المملكة في مكة المكرمة ضمن جهاز البلدية، وفي عام ١٣٨٥هـ عُدّل مُسمّى المديرية العامة للإطفاء إلى المديرية العامة للدفاع المدني.

٣٢) **مكافحة حرائق:** تمثل سرعة الماء (ع) الذي يُضَخ لمكافحة الحرائق بالمعادلة ع = $٢\sqrt{\text{ف جـ}}$، حيث (ف) أقصى ارتفاع للماء، (جـ) تسارع الجاذبية الأرضية (٣٢ قدمًا/ ث^{٢}).

أ) حُلّ المعادلة بالنسبة لـ ف.

ب) إذا احتاجت إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع ٨٠ قدمًا، فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة ٧٠ قدمًا/ ث؟ فسّر إجابتك.

جـ) تريد إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة تضخ الماء إلى ارتفاع ٩٠ قدمًا. فهل المضخة التي تضخ الماء بسرعة ٧٧ قدمًا/ ث تحقق حاجة الإدارة؟ فسّر إجابتك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

المثالان ٤ ، ٥ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٣٣) $\sqrt{\frac{٣٢}{ت^{٤}}}$ ٣٤) $\sqrt{\frac{٢٧}{م^{٥}}}$ ٣٥) $\frac{\sqrt{٦٨أ جـ^{٣}}}{\sqrt{٢أ٢٧}}$

٣٦) $\sqrt{\frac{٣}{١٦}} \times \sqrt{\frac{٩}{٥}}$ ٣٧) $\frac{٩}{\sqrt{٨} - ٦}$ ٣٨) $\frac{\sqrt{٥}٢}{\sqrt{٣}٣ + \sqrt{٧}٢}$

٣٩) **طاقة حركية:** يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة: ع = $\sqrt{\frac{٢ق}{ك}}$، حيث (ق) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (ك) كتلة الكرة.

أ) بسّط المعادلة معتبرًا كتلة الكرة ٣ كيلو جرامات.

ب) إذا كانت سرعة الكرة ٧ أمتار/ ثانية، فما قيمة الطاقة الحركية للكرة بالجول؟

٤٠) **قفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي (ن) بالثواني اللازم لسقوط جسم من ارتفاع (ل) بالأقدام يُعطى بالمعادلة: ن= $\sqrt{\frac{ل}{١٦}}$ ، فما الارتفاع الذي سقط منه مظلِّيٌّ إذا كان الزمن قبل فتح المظلة كما هو موضَّح بالجدول الآتي:

زمن السقوط	٤	٥	٦	٧
الارتفاع				

مسائل مهارات التفكير العليا

٤١) **تبرير:** وضّح كيف تحل (٣ س− ٢)^{٢} = (٢س+ ٦)^{٢}.

٤٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائيتي حد على الصورة أ$\sqrt{ب}$+ جـ$\sqrt{ف}$ ، أ$\sqrt{ب}$− جـ$\sqrt{ف}$ ثم أوجد ناتج ضربهما.

٤٣) **تحد:** استعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية لتشتق القانون العام لحل المعادلة التربيعية من خلال حل المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ (ابدأ بإكمال المربع).

٤٤) **اكتب:** ملخصًا تبين فيه كيف تكتب عبارة جذرية في أبسط صورة.

تدريب على اختبار

٤٥) **إجابة قصيرة:** دفع أحمد قيمة فاتورة الكهرباء أقلّ بِـ ٢٣ ريالاً مما دفع خالد. وكان مجموع قيمة الفاتورتين ١٠٩ ريالات. اكتب معادلة يمكن استعمالها لإيجاد قيمة فاتورة خالد.

٤٦) أيّ العبارات الآتية تكافئ $\sqrt{١٦٠}$س^{٢} ص^{٥}؟

أ) ١٦|س|ص^{٢} $\sqrt{١٠ص}$

ب) |س|ص^{٢} $\sqrt{١٦٠ص}$

جـ) ٤|س|ص^{٢} $\sqrt{١٠ص}$

د) ١٠|س|ص^{٢} $\sqrt{٤ص}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر: (الدرس ٨-٤)

٤٧) $ر^٢ + ٢٥ = ٠$ ٤٨) $٤و^٢ + ١٠٠ = ٤٠و$ ٤٩) $١١س^٢ - س = ٣$

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي، إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب أولية: (الدرس ٧-٥)

٥٠) $٤ - ٩أ^٢$ ٥١) $٤ت^٢ - ٢٧$ ٥٢) $س^٣ - ٣س^٢ - ٩س + ٢٧$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلِّل كلًّا من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

٥٣) ٢٤ ٥٤) ٨٨ ٥٥) ١٨٠

٥٦) ٣١ ٥٧) ٦٠ ٥٨) ٩٠

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الأسس النسبية

معمل الحاسبة البيانية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

درست خصائص الأسس للأعداد الكلية إلا أن بعض الأسس قد تكون أعدادًا نسبية أو كسورًا. ويمكنك في هذا النشاط استعمال الحاسبة لاستكشاف معنى الأسس النسبية.

نشاط الأسس النسبية

الخطوة ١: احسب قيمة ١٦$^{\frac{١}{٢}}$ ثم $\sqrt{١٦}$.

اضغط المفاتيح: 16 ^ (1 ÷ 2) enter

اضغط المفاتيح: 16 ctrl x^2 enter

سجِّل النتائج في الجدول المجاور.

الخطوة ٢: استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل عبارة، ثم سجِّل النتائج في جدولك.

لإيجاد الجذور الأخرى غير الجذر التربيعي، اختر دالة $\sqrt[n]{\ }$ بالضغط على المفاتيح ctrl ^ .

العبارة	القيمة	العبارة	القيمة
١٦$^{\frac{١}{٢}}$	٤	$\sqrt{١٦}$	٤
٢٥$^{\frac{١}{٢}}$		$\sqrt{٢٥}$	
٦٤$^{\frac{١}{٣}}$		$\sqrt[٣]{٦٤}$	
١٢٥$^{\frac{١}{٣}}$		$\sqrt[٣]{١٢٥}$	
٦٤$^{\frac{٢}{٣}}$		$\sqrt[٣]{٦٤^{٢}}$	
٨١$^{\frac{٣}{٤}}$		$\sqrt[٤]{٨١^{٣}}$	

١أ) ما الذي تلاحظه في أثناء دراستك الجدول حول قيمة العبارة التي على الصورة أ$^{\frac{١}{ن}}$ ؟

١ب) ما الذي تلاحظه حول قيمة العبارة التي على الصورة أ$^{\frac{م}{ن}}$ ؟

تمارين

١) تذكّر خاصية قوة القوة لأي عدد حقيقي أ، وأي عددين صحيحين م، ن. $(أ^{م})^{ن} = (أ^{م \times ن})$

افترض أن الأسس الكسرية تعامل معاملة أسس الأعداد الكلية، وأوجد قيمة $(ب^{\frac{١}{٢}})^{٢}$

$(ب^{\frac{١}{٢}})^{٢} = ب^{\frac{١}{٢} \times ٢}$ خاصية قوة القوة

$= ب^{١} = ب$ بسّط

لذا، فإن ب$^{\frac{١}{٢}}$ هو عدد مربعه يساوي ب؛ لذا فمن الممكن تعريف ب$^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{ب}$. استعمل طريقة مشابهة لتعريف ب$^{\frac{١}{ن}}$.

٢) عرّف ب$^{\frac{م}{ن}}$. برّر إجابتك.

اكتب كل جذر فيما يأتي على صورة عبارة أسية باستعمال الأسس النسبية، ثم أوجد قيمتها:

٣) $\sqrt{٣٦}$

٤) $\sqrt{١٢١}$

٥) $\sqrt[٤]{٢٥٦}$

٦) $\sqrt[٥]{٣٢}$

٧) $\sqrt[٣]{٢٨}$

٨) $\sqrt[٤]{١٢٩٦}$

٩) $\sqrt[٤]{٣١٦}$

١٠) $\sqrt[٣]{٣٨}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٩-٢

العمليات على العبارات الجذرية

فيما سبق

درست تبسيط العبارات الجذرية.

والآن

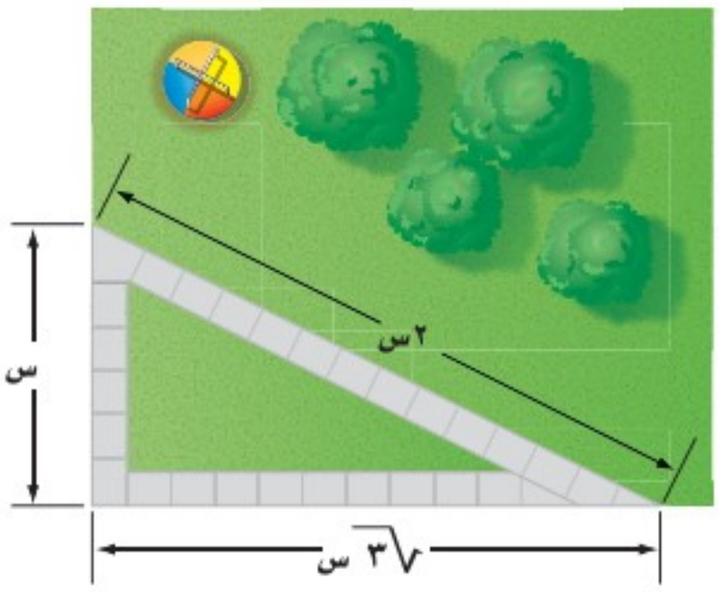
- أجمع العبارات الجذرية وأطرحها.
- أضرب العبارات الجذرية.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا؟

يتدرّب خالد على الجري في الحديقة، في مسار على صورة مثلث كما في الشكل المجاور؛ استعدادًا للمشاركة في مسابقات الجري، منهيًا ثلاث دورات يوميًّا. ما المسافة التي يقطعها في دورة الجري الواحدة؟ وما المسافة التي يقطعها يوميًّا؟



جمع العبارات الجذرية وطرحها: يجب أن تكون العبارات الجذرية عند جمعها أو طرحها متشابهة مثلها مثل وحيدات الحد.

وحيدات الحدّ	العبارات الجذرية
$٤أ + ٢أ = (٤ + ٢)أ$	$\sqrt{٥}٤ + \sqrt{٥}٢ = \sqrt{٥}(٤ + ٢)$
$= ٦أ$	$= \sqrt{٥}٦$
$٩ب - ٢ب = (٩ - ٢)ب$	$\sqrt{٣}٩ - \sqrt{٣}٢ = \sqrt{٣}(٩ - ٢)$
$= ٧ب$	$= \sqrt{٣}٧$

لاحظ أن ما تحت الجذر لا يتغير عند جمع العبارات الجذرية أو طرحها، ويحدث الشيء نفسه عند جمع وحيدات الحد، إذ تبقى المتغيرات كما هي.

مثال ١ جمع عبارات ماتحت جذورها متشابه وطرحها

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

أ) $\sqrt{٢}٥ + \sqrt{٢}٧ - \sqrt{٢}٦$

$\sqrt{٢}٥ + \sqrt{٢}٧ - \sqrt{٢}٦ = \sqrt{٢}(٥ + ٧ - ٦)$ خاصية التوزيع

$= \sqrt{٢}٦$ بسّط

ب) $\sqrt{١١}٦ - \sqrt{٧}٤ + \sqrt{١١}٥ + \sqrt{٧}١٠$

$\sqrt{١١}٦ - \sqrt{٧}٤ + \sqrt{١١}٥ + \sqrt{٧}١٠ = \sqrt{١١}(٦ - ٥) + \sqrt{٧}(٤ + ١٠)$ خاصية التوزيع

$= \sqrt{١١} - \sqrt{٧}١٤$ بسّط

تحقق من فهمك

١أ) $\sqrt{٢}٣ - \sqrt{٢}٥ + \sqrt{٢}٤$

١ب) $\sqrt{١١}٦ + \sqrt{١١}٢ - \sqrt{١١}٩$

١جـ) $\sqrt{٣}١٥ - \sqrt{٥}١٤ + \sqrt{٥}٦ - \sqrt{٣}١١$

١د) $\sqrt{٣}٤ + \sqrt{٧}٣ - \sqrt{٣}٦ + \sqrt{٧}٣$

بعض العبارات الجذرية لايكون لها ما تحت الجذر نفسه، وعند تبسيطها قد يكون لها ما تحت الجذر نفسه فيمكنك جمعها أو طرحها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٢ جمع عبارات ما تحت جذورها غير متشابه وطرحها

بسّط: $٢\sqrt{١٨} + ٢\sqrt{٣٢} + \sqrt{٧٢}$.

$٢\sqrt{١٨} + ٢\sqrt{٣٢} + \sqrt{٧٢} = ٢(\sqrt{٢} \times \sqrt[٢]{٣}) + ٢(\sqrt{٢} \times \sqrt[٢]{٤}) + (\sqrt{٢} \times \sqrt[٢]{٦})$ خاصية الضرب

$= ٢(\sqrt{٢}٣) + ٢(\sqrt{٢}٤) + (\sqrt{٢}٦)$ بسّط

$= \sqrt{٢}٦ + \sqrt{٢}٨ + \sqrt{٢}٦$ اضرب

$= \sqrt{٢}٢٠$ بسّط

تحقق من فهمك

٢أ) $٤\sqrt{٤٥} + ٢\sqrt{٢٤}$

٢ب) $٤\sqrt{١٢} - ٦\sqrt{٤٨}$

٢جـ) $٣\sqrt{٤٥} + \sqrt{٢٠} - \sqrt{٢٤٥}$

٢د) $\sqrt{٢٤} - \sqrt{٥٤} + \sqrt{٩٦}$

إرشادات للدراسة

بسّط:

يجب تبسيط كل حد جذري أولًا، ثم إجراء العمليات الحسابية المطلوبة.

ضرب العبارات الجذرية: يشبه ضرب العبارات الجذرية ضرب وحيدات الحد.

وحيدات الحد	العبارات الجذرية
$(٢س)(٣س) = ٢ \times ٣ \times س \times س$	$(٢\sqrt{س})(٣\sqrt{س}) = ٢ \times ٣ \times \sqrt{س} \times \sqrt{س}$
$= ٦س^{٢}$	$= ٦س$

كما يمكنك أيضًا تطبيق خاصية التوزيع على العبارات الجذرية.

مثال ٣ ضرب العبارات الجذرية

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

أ) $٢\sqrt{٣} \times ٢\sqrt{٦}$

$٢\sqrt{٣} \times ٢\sqrt{٦} = (٢ \times ٣)(\sqrt{٢} \times \sqrt{٦})$ خاصية التجميع

$= ٦(\sqrt{١٢})$ اضرب

$= ٦(٢\sqrt{٣})$ بسّط

$= ١٢\sqrt{٣}$ اضرب

ب) $٣\sqrt{٥}(٢\sqrt{٥} + \sqrt{٣})$

$٣\sqrt{٥}(٢\sqrt{٥} + \sqrt{٣}) = (٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥}) + (٣\sqrt{٥} \times \sqrt{٣})$ خاصية التوزيع

$= [(٣\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥})(٥ \times ٣)] + [(\sqrt{٥} \times \sqrt{٥})(٢ \times ٣)]$ خاصية التجميع

$= [(٢٥\sqrt{})٦] + [(١٥\sqrt{})١٥]$ اضرب

$= [(٥)٦] + [(١٥\sqrt{})١٥]$ بسّط

$= ٣٠ + ١٥\sqrt{١٥}$ اضرب

تنبيه!

ضرب العبارات الجذرية

الخطأ الشائع عند ضرب العبارات الجذرية هو جمع ما تحت جذورها لا ضربه؛ لذا تحقق من ضرب ما تحت الجذور.

تحقق من فهمك

٣أ) $٢\sqrt{٦} \times ٧\sqrt{٣}$

٣ب) $٩\sqrt{٥} \times ١١\sqrt{١٥}$

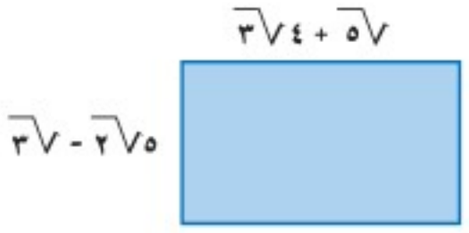
٣جـ) $٣\sqrt{٣}(٤\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٢})$

٣د) $٥\sqrt{٣}(٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣})$

ويمكنك أيضًا ضرب عبارات جذرية يضم كلّ منها أكثر من حد واحد. وهو ما يشبه ضرب عبارتين جبريتين ثنائيتي الحد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٤ من واقع الحياة — ضرب عبارات جذرية



هندسة : أوجد مساحة المستطيل المجاور بأبسط صورة.

م = $(\sqrt{٣}٤ + \sqrt{٥})(\sqrt{٣} - \sqrt{٢٥})$ — م = ل × ض

= $(\sqrt{٥})(\sqrt{٢٥})$ + $(\sqrt{٣}٤)(\sqrt{٢٥})$ + $(-\sqrt{٣})(\sqrt{٥})$ + $(\sqrt{٣}٤)(-\sqrt{٣})$

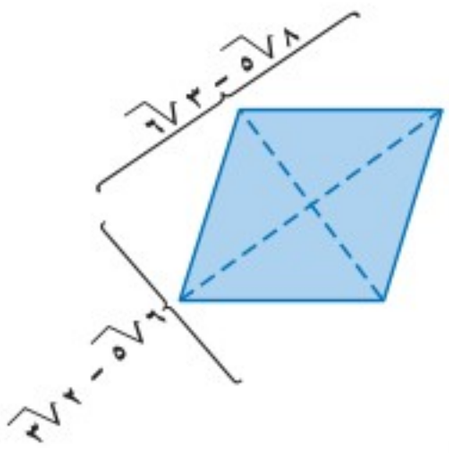
الحدّان الأولان — الحدّان في الطرفين — الحدّان الأوسطان — الحدّان الأخيران

$= \sqrt{١٠}٥ + \sqrt{٦}٢٠ - \sqrt{١٥} - \sqrt{٩}٤$ — اضرب

$= \sqrt{١٠}٥ + \sqrt{٦}٢٠ - \sqrt{١٥} - ١٢$ — بسّط

تحقق من فهمك

٤) **هندسة :** يمكن إيجاد مساحة معين باستعمال المعادلة م = $\frac{١}{٢}$ ق١ × ق٢، حيث ق١، ق٢ طولا قطري المعين.
ما مساحة المعين في الشكل المجاور؟



قراءة الرياضيات

طريقة التوزيع بالترتيب:
اضرب ثنائيتي حد عن طريق إيجاد مجموع حاصل ضرب الحدين الأولين والحدين في الطرفين والحدين الأوسطين والحدين الأخيرين.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

العمليات على العبارات الجذرية

العملية	الرموز	مثال
الجمع ، ب ≥ ٠	أ $\sqrt{ب}$ + جـ $\sqrt{ب}$ = (أ + جـ) $\sqrt{ب}$ ما تحت الجذرين متشابه	$\sqrt{٣}٤ + \sqrt{٣}٦ = \sqrt{٣}(٤ + ٦)$ $= \sqrt{٣}١٠$
الطرح ، ب ≥ ٠	أ $\sqrt{ب}$ − جـ $\sqrt{ب}$ = (أ − جـ) $\sqrt{ب}$ ما تحت الجذرين متشابه	$\sqrt{٥}١٢ - \sqrt{٥}٨ = \sqrt{٥}(١٢ - ٨)$ $= \sqrt{٥}٤$
الضرب ، ب ≥ ٠، جـ ≥ ٠	(أ $\sqrt{ب}$)(د $\sqrt{جـ}$) = أ د $\sqrt{ب جـ}$ ليس من الضروري تشابه ما تحت الجذرين.	$\sqrt{٢}٣ (\sqrt{٧}٥) = (٣ \times ٥)(\sqrt{٧} \times \sqrt{٢})$ $= \sqrt{١٤}١٥$

تأكد

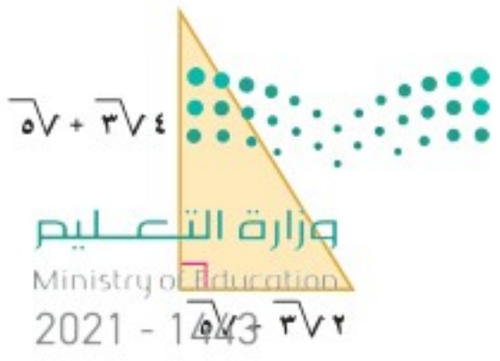
الأمثلة ١-٣ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١) $\sqrt{٥}٣ + \sqrt{٥}٦$ — ٢) $\sqrt{٧}٦ - \sqrt{٧}$ — ٣) $\sqrt{٢٠}٢ + \sqrt{٥}٤$

٤) $\sqrt{٣} - \sqrt{١٢}$ — ٥) $\sqrt{١٨} + \sqrt{١٢} + \sqrt{٨}$ — ٦) $\sqrt{١٢} - \sqrt{٣}٢ + \sqrt{٢٧}$

٧) $\sqrt{٢}٩ (\sqrt{٦}٤)$ — ٨) $\sqrt{٣}(\sqrt{٧} + \sqrt{٢}٣)$ — ٩) $\sqrt{٥} (\sqrt{٢}٤ + \sqrt{٢})$

مثال ٤ ١٠) **هندسة :** يمكن إيجاد مساحة المثلث م باستعمال المعادلة:
م = $\frac{١}{٢}$ ق × ع، حيث (ق) طول القاعدة، (ع) ارتفاع المثلث.
احسب مساحة المثلث في الشكل المجاور.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١-٣ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

١١) $\sqrt{٢}\sqrt{٦}+\sqrt{٩}\sqrt{٦}$

١٢) $\sqrt{٣}\sqrt{٥٠}-\sqrt{٣}\sqrt{٣٢}$

١٣) $\sqrt{٧}\sqrt{٣}-\sqrt{٢}\sqrt{٢}+\sqrt{٣}\sqrt{٢}+\sqrt{٥}\sqrt{٣}$

١٤) $\sqrt{٧}\sqrt{٧}\left(\sqrt{٥}\sqrt{٣}+\sqrt{٥}\sqrt{٣}\right)$

١٥) $\sqrt{٦}\sqrt{٢}\left(\sqrt{٣}\sqrt{٢}+\sqrt{١٠}\sqrt{٢}\right)$

١٦) $\sqrt{٥}\sqrt{٣}\left(\sqrt{٦}\sqrt{٣}-\sqrt{١٠}\sqrt{٦}\right)$

١٧) $\left(\sqrt{٣}\sqrt{٢}-\sqrt{٧}\sqrt{٣}\right)\left(\sqrt{١٥}\sqrt{٢}+\sqrt{١٢}\sqrt{٢}\right)$

١٨) $\left(\sqrt{٥}\sqrt{٢}-\sqrt{١٠}\sqrt{٢}\right)\left(\sqrt{٢}\sqrt{٥}+\sqrt{٥}\sqrt{٣}\right)$

مثال ٤

١٩) **هندسة:** أوجد محيط ومساحة مستطيل عرضه $\sqrt{٢}\sqrt{٧}-\sqrt{٢}\sqrt{٥}$ وطوله $\sqrt{٣}\sqrt{٧}+\sqrt{٣}\sqrt{٥}$.

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

٢٠) $\sqrt{\frac{١}{٥}}\sqrt{٥}-\sqrt{٧}$

٢١) $\sqrt{\frac{٢}{٣}}\sqrt{٦}+\sqrt{٧}$

٢٢) $\sqrt{\frac{١}{٢}}\sqrt{٢}+\sqrt{٢}\sqrt{٢}-\sqrt{٨}$

٢٣) $\sqrt{\frac{٥}{٤}}\sqrt{٨}+\sqrt{٢٠}\sqrt{٣}-\sqrt{\frac{١}{٥}}\sqrt{١٠}$

٢٤) $\left(\sqrt{٥}\sqrt{٣}-٣\right)^{٢}$

٢٥) $\left(\sqrt{٣}\sqrt{٢}+\sqrt{٢}\sqrt{٢}\right)^{٢}$

الربط مع الحياة

لعبة الأفعوانية نموذج مصغر لسكة حديدية ملتوية ترتفع عن الأرض، وتعد من الألعاب الشهيرة والرئيسة في مدن الألعاب الكبيرة، ويقبل عليها الكثيرون وخصوصًا الشباب للتسلية والترفيه، ولما يميزها من المتعة والإثارة.

٢٦) **لعبة الأفعوانية:** تعبر المعادلة ع. $=\sqrt{ع^{٢}-٦٤ل}$ عن سرعة الانطلاق (ع) بالقدم/ ثانية في أدنى نقطة لها عند هبوطها من ارتفاع عمودي (ل) بالأقدام وبسرعة (ع.).

أ) كم تكون سرعة الأفعوانية عند قمة ارتفاعها ٢٢٥ قدمًا كي تصل سرعتها إلى ١٢٠ قدمًا/ ثانية في أدنى نقطة لها؟

ب) فسِّر لماذا لا تكافئ المعادلة ع. $=ع-\sqrt{٨}\sqrt{ل}$ المعادلة المعطاة؟

٢٧) **استثمار:** استثمر عامر مبلغ ٢٢٥٠٠ ريال في التجارة، فأصبح المبلغ ٢٧٠٠٠ ريال بعد سنتين. يمكنك استعمال المعادلة $ر=\sqrt{\frac{ع_{٢}}{ع.}}-١$ لإيجاد معدّل الربح السنوي (ر)، حيث تمثل (ع.) المبلغ الأصلي، و (ع٢) المبلغ بعد سنتين. أوجد معدّل الربح السنوي للمبلغ الذي استثمره عامر؟

٢٨) **كهرباء:** تستعمل المعادلة $ت=\frac{\sqrt{قد}}{\sqrt{م}}$ لحساب شدة التيار الكهربائي بالأمبير (ت)، حيث (قد) قدرة الجهاز بالواط، (م) المقاومة بالأوم. ما شدة التيار الكهربائي في فرن الميكروويف إذا كانت قوة التيار ٨٥٠ واط، ومقاومته ٥ أوم؟ اكتب شدة التيار في أبسط صيغة جذرية، ثم قدّر قيمته إلى أقرب جزء من عشرة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٩) **تحدٍّ:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو غير صحيحة، وأعط مثالاً أو مثالاً مضادًّا:

س + ص > $\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}}$ عندما س > ٠ ، ص > ٠

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٣٠) **تبرير:** بيّن أنه إذا كانت أ، ب، جـ، د، أعدادًا نسبية، فإن ناتج ضرب:
$\sqrt{أ+ب}$ + $\sqrt{جـ+ف}$ ، $\sqrt{أ+ب}$ − $\sqrt{جـ+ف}$، لا يحوي جذورًا. فسّر إجابتك.

٣١) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة جمع جذرين ما تحت كل منهما مختلف. وفسّر كيف يمكنك جمع هذين الحدين.

٣٢) **اكتب:** صف بالخطوات كيف تضرب عبارتين جذريتين يتكون كل منهما من حدين، واكتب مثالاً يوضِّح ذلك.

تدريب على اختبار

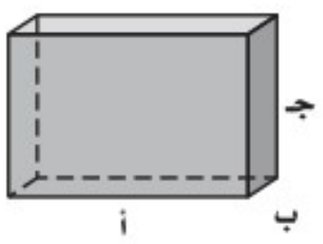
٣٣) **إجابة قصيرة:** إذا كان عدد سكان مدينة ١٣٠٠٠٠ نسمة ويتزايدون بمقدار ٢٥٠٠ شخص في السنة، فإنه يمكن التعبير عن عدد سكانها بعد (س) سنة من ذلك بالمعادلة:
ع = ١٣٠٠٠٠ + ٢٥٠٠س. بعد كم سنة يصبح عدد سكان المدينة ١٤٥٠٠٠؟

٣٤) أيّ ممّا يأتي يكافئ العبارة: ٨ (٣−ص) + ٥(٣−ص)؟

أ) ٣٩ − ص　　**جـ)** ١٣(٣ − ص)

ب) ٤٠(٣٠ − ص)　　**د)** ١٣(٦ − ٢ص)

٣٥) **هندسة:** أي عبارة مما يأتي تمثّل مجموع أطوال الاثني عشر حرفًا للمنشور الرباعي (متوازي المستطيلات) أدناه؟



أ) ٢(أ + ب + جـ)　　**جـ)** ٤(أ + ب + جـ)

ب) ٣(أ + ب + جـ)　　**د)** ١٢(أ + ب + جـ)

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩ - ١)

٣٦) $\sqrt{١٨}$　　٣٧) $\sqrt{٢٤}$　　٣٨) $\sqrt{٦٠}$

٣٩) $\sqrt{٥٠أ^{٣}ب^{٥}}$　　٤٠) $\sqrt{١٦٩س^{٤}ص^{٧}}$　　٤١) $\sqrt{٦٣جـ^{٣}د^{٤}ف^{٥}}$

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

٤٢) س^{٢} + ١٢س + ٢٧　　٤٣) ص^{٢} + ١٣ص + ٣٠　　٤٤) ب^{٢} − ١٧ب + ٧٢

٤٥) س^{٢} + ٦س − ٧　　٤٦) ص^{٢} − ص − ٤٢　　٤٧) −٧٢ + ٦و + و^{٢}

استعد للدرس اللاحق

حُلّ كل معادلة فيما يأتي مقرِّبًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:

٤٨) −٤جـ − ٢,١ = ٠,٨　　٤٩) −٦,٢ك − ٣٣,٧ = ٨٤,١　　٥٠) ٠,٣م + ٤ = ٩,٦

٥١) $\frac{ن}{٥}$ − ١٠− = ٦　　٥٢) $\frac{-٤هـ-(-٥)}{-٧}$ = ١٣　　٥٣) ٣,٦ت + ٦ − ٢,٥ = ٨

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٩-٣ المعادلات الجذرية

فيما سبق

درست جمع عبارات جذرية وطرحها وضربها.

والآن

- أحلّ معادلات جذرية.
- أحلّ معادلات جذرية تتضمن حلولاً دخيلة.

المفردات

المعادلات الجذرية

الحلول الدخيلة

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا ؟

طول غاطس القارب الشراعي هو طول الخط الذي يصنعه مع حافة الماء عندما يكون حاملًا أقصى حمولته.

ويمكن تقدير أقصى سرعة للقارب بالكيلومتر/ ساعة باستعمال المعادلة: ع = ٥ , ٤ $\sqrt{ل}$، حيث (ل) تمثّل طول غاطس القارب بالأمتار.

المعادلات الجذرية : المعادلات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر، مثل ع = ٥ , ٤ $\sqrt{ل}$ تُسمى **معادلات جذرية**. ولحل مثل هذه المعادلات اجعل المتغير الذي تريد إيجاد قيمته في طرف من المعادلة أولاً، ثم ربِّع طرفي المعادلة؛ للتخلص من الجذر.

مفهوم أساسي — **خاصية تربيع طرفي المساواة**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا ربّعت طرفي معادلة صحيحة، فإن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة.

الرموز: إذا كانت أ = ب، فإن: أ^{٢} = ب^{٢}.

مثال: إذا كانت $\sqrt{س}$ = ٤، فإن ($\sqrt{س}$)^{٢} = ٤^{٢}

مثال ١ من واقع الحياة — **متغير تحت الجذر**

إبحار: يبحر إدريس وموسى في قارب شراعي، سرعته ١٦,٦٥ كلم/ ساعة. أوجد طول الغاطس إلى أقرب عُشر من المتر. بالرجوع إلى فقرة لماذا، حل السؤال التالي:

افهم: تعلم سرعة القارب في رحلته والتي لها علاقة بطول غاطس القارب.

خطّط: يسير القارب بسرعة ١٦,٦٥ كم/ ساعة ومعادلة السرعة هي: ع = ٥ , ٤ $\sqrt{ل}$.

حل:

ع = ٥ , ٤ $\sqrt{ل}$ — معادلة سرعة القارب

١٦,٦٥ = ٥ , ٤ $\sqrt{ل}$ — عوّض ع = ١٦,٦٥

$\frac{١٦,٦٥}{٤,٥} = \frac{٤,٥\sqrt{ل}}{٤,٥}$ — اقسم على ٤,٥

$\sqrt{ل}$ = ٣,٧ — بسّط

(٣,٧)^{٢} = ($\sqrt{ل}$)^{٢} — ربّع طرفي المعادلة

ل = ١٣,٦٩ — بسّط

طول الغاطس يساوي ١٣,٧ مترًا تقريبًا.

تحقق: تحقق بتعويض الحل في المعادلة الأصلية.

ع = ٥ , ٤ $\sqrt{ل}$ — معادلة سرعة القارب

١٦,٦٥ $\stackrel{؟}{=}$ ٥ , ٤ $\sqrt{١٣,٧}$ — عوّض ع = ١٦,٦٥، ل = ١٣,٧

١٦,٦٥٦٠٧٩٩ ≈ ١٦,٦٥ ✓ — اضرب

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

١) **قيادة :** تمثّل المعادلة ع $= \sqrt{٣}$ ، ٢١ نق السرعة القصوى بالكيلومتر/ ساعة التي يمكن أن تسير بها سيارة بأمان على طريق منحنٍ غير محدد الجانبين، حيث (نق) نصف قطر المنحنى بالأمتار. فإذا صُمّم الطريق لسرعة قصوى مقدارها ١٠٥ كلم/ ساعة، فما طول نصف قطر المنحنى؟

لحل المعادلات الجذرية: اجعل الجذر في طرف من المعادلة أولاً، ثم ربّع طرفيها.

تنبيه !

تربيع الطرفين

تذكّر أنه عند تربيع طرفي المعادلة، يجب تربيع كل طرف منها وإن كان يتكون من أكثر من حد واحد.

مثال ٢ حل المعادلة الجذرية

حل المعادلة: $\sqrt{أ + ٥} + ٧ = ١٢$.

$\sqrt{أ + ٥} + ٧ = ١٢$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{أ + ٥} = ٥$	اطرح ٧ من الطرفين
$(\sqrt{أ + ٥})^{٢} = ٢٥$	ربّع الطرفين ، وبسّط
$أ + ٥ = ٢٥$	بسّط
$أ = ٢٠$	اطرح ٥ من الطرفين

تحقق من فهمك

٢أ) $\sqrt{جـ - ٣} - ٢ = ٤$

٢ب) $٤ + \sqrt{هـ + ١} = ١٤$

حلول دخيلة : ينتج عن تربيع طرفي المعادلة أحيانًا حلّ لا يحقق المعادلة الأصلية. وهذه الحلول تُسمى **حلولًا دخيلة**؛ لذا عليك التحقق من الحلول كلها في المعادلة الأصلية.

مثال ٣ حلّ المعادلة التي تحتوي متغيرًا في كلا طرفيها

حل المعادلة: $\sqrt{ك + ١} = ك - ١$. وتحقق من صحة الحل.

$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{ك + ١})^{٢} = (ك - ١)^{٢}$	ربّع الطرفين
$ك + ١ = ك^{٢} - ٢ك + ١$	بسّط
$٠ = ك^{٢} - ٣ك$	اطرح ك ، ١ من الطرفين
$٠ = ك(ك - ٣)$	حلّل
$ك = ٠$ أو $ك - ٣ = ٠$	خاصية الضرب الصفري
$ك = ٠$ أو $ك = ٣$	حل

$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$	المعادلة الأصلية	$\sqrt{ك + ١} = ك - ١$ المعادلة الأصلية
$\sqrt{ك + ١} = ١ - ك$	بسّط	$\sqrt{ك + ١} = ١ - ك$ عوّض ك = ٣
$\sqrt{١} \stackrel{؟}{=} -١$	بسّط	$\sqrt{٤} \stackrel{؟}{=} ٢$ بسّط
$١ = -١$ ✗	خطأ	$٢ = ٢$ ✓ صحيح

تحقق: عوّض ك = ٠ — $\sqrt{٠ + ١} \stackrel{؟}{=} ٠ - ١$

عوّض ك = ٣ — $\sqrt{٣ + ١} \stackrel{؟}{=} ٣ - ١$

وبما أن الصفر لا يحقق المعادلة الأصلية؛ لذا فإن ٣ هو الحل الوحيد.

تحقق من فهمك

٣أ) $\sqrt{ت + ٥} = ت + ٣$

٣ب) $س - ٣ = \sqrt{س - ١}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

مثال ١ ١) **هندسة:** ما طول نصف قطر كرة سلة إذا كانت معادلة مساحة سطحها هي م = ٤ ط نق^{٢}؟

المثالان ٢، ٣ حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٢) $\sqrt{١٠هـ} + ١ = ٢١$ ٣) $\sqrt{٧ر + ٢} + ٣ = ٧$ ٤) $٥ + \sqrt{جـ - ٣} = ٦$

٥) $\sqrt{٣س - ٥} = س - ٥$ ٦) $\sqrt{٢ن + ٣} = ن$ ٧) $\sqrt{أ - ٢} + ٤ = أ$

تدرب وحل المسائل

مثال ١ ٨) **رياضة:** يمكن استعمال الدالة ع = ط $\sqrt{\frac{٩,٨ل}{٧}}$ ، لتقريب أقصى سرعة يمكن أن يركض بها شخص، حيث (ع) السرعة بالمتر/ ثانية، (ل) طول ساق الشخص بالأمتار.

أ) ما أقصى سرعة يركض بها شخص طول ساقه ٤ , ٠ متر إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟

ب) ما طول الساق لشخص سرعته القصوى ٧ , ٢ م/ ث إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟

جـ) هل تزيد السرعة القصوى أم تنقص بزيادة طول الساق؟

المثالان ٢، ٣ حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٩) $\sqrt{أ} + ١١ = ٢١$ ١٠) ١١) $\sqrt{٣} = \sqrt{ك + ٧}$

١٢) $ص = \sqrt{١٢ - ص}$ ١٣) $\sqrt{ر + ٣} = ر - ٣$ ١٤) $\sqrt{٥أ - ٣} + ٤ = ١٤$

١٥) $\sqrt{س^{٢} + ٩س + ١٥} = س + ٥$ ١٦) $\sqrt{٦ - \frac{٥ك}{٤}} - ٣ = ٠$ ١٧) $\sqrt{٥س^{٢} - ٩} = ٢س$

١٨) **بندول:** يُطلق على الزمن (ن) بالثواني الذي يستغرقه بندول ساعة لعمل دورة كاملة الزمن الدوري. ويُعبَّر عنه بالمعادلة: ن = ٢ ط $\sqrt{\frac{ل}{٣٢}}$ ، حيث (ل) طول البندول بالأقدام.

أ) ما طول بندول ساعة زمنه الدوري ٨ ثوانٍ؟ قرّب إلى أقرب قدم.

ب) هل زيادة طول البندول تزيد السرعة أم تنقصها؟ فسِّر إجابتك.

١٩) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في حل المعادلة $\sqrt{٢س - ٧} = س - ٧$ طرائق متنوعة للحل.

أ) بيانيًا: افتح شاشة جديدة، ثم أدخل الطرف الأيمن من المعادلة على صورة ص$_{١}$ = $\sqrt{٢س - ٧}$. وأدخل الطرف الأيسر على صورة ص$_{٢}$ = س − ٧، ثم اضغط مفتاح 2:Add Graphs .

ب) بيانيًا: مثّل ما يظهر على الشاشة.

جـ) تحليليًا: استعمل مفتاح المقطع من قائمة 3:Intersection Point(s) ، لإيجاد نقطة التقاطع.

د) تحليليًا: حُلّ المعادلة الجذرية جبريًا، وكيف يمكن مقارنة حلك بالحل الناتج بيانيًا؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٢٠) **تغليف:** حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتمترًا مكعبًا. تستعمل المعادلة نق = $\sqrt{\frac{ح}{ط ع}}$ لإيجاد نصف قطر العلبة، حيث (ح) حجم العلبة، وَ (ع) ارتفاعها.

أ) إذا كان نصف قطر العلبة ٢,٥ سم، فأوجد ارتفاعها إلى أقرب جزء من مئة.

ب) إذا كان ارتفاع العلبة ١٠ سم، فأوجد نصف قطرها إلى أقرب جزء من مئة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢١) **تبرير:** بيّن الاختلاف في حل المعادلتين الآتيتين: ٥ = $\sqrt{س}$ + ١ ، ٥ = $\sqrt{س + ١}$.

٢٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة جذرية تحتوي متغيرًا في كلا طرفيها، ثم حُلَّ المعادلة.

٢٣) **تبرير:** هل المعادلة الآتية صحيحة أحيانًا، أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ فسّر إجابتك.

$$\sqrt{(س - ٢)^{٢}} = س - ٢$$

٢٤) **تحدٍّ:** حل المعادلة: $\sqrt{س + ٩}$ = $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{س}$

٢٥) **اكتب:** بعض القواعد العامة المتعلقة بحل المعادلات الجذرية، موضِّحًا هذه القواعد من خلال حل معادلات جذرية.

تدريب على اختبار

٢٦) ما حل المعادلة:

$\sqrt{س + ٣}$ − ١ = س − ٤؟

أ) ١، ٦ — جـ) −١، −٦

ب) ١ — د) ٦

٢٧) أي العبارات الآتية تكافئ $\sqrt{\frac{٣٦}{٢٧}}$ ؟

أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ — جـ) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

ب) $\frac{\sqrt{٣٢}}{٣}$ — د) $\frac{\sqrt{٢٣}}{٢}$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-١)

٢٨) $\sqrt{٦}٢ \times \sqrt{٣}٧$

٢٩) $\sqrt{\frac{٢٧}{٢أ}}$

٣٠) $\sqrt{\frac{٥جـ^{٥}}{٤د^{٥}}}$

٣١) **فيزياء:** قُذف جسم إلى الأعلى من مستوى الأرض حسب المعادلة ع = ٦٩ن − ١٦ ن^{٢} ، حيث (ع) تمثّل ارتفاعه بالأقدام، بعد (ن) من الثواني. أوجد قيم ن عندما يكون ارتفاع الجسم ٩٦ قدمًا. (الدرس ٨-٤)

حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب «أولية». (الدرس ٧-٤)

٣٢) ٢س^{٢} + ٧س + ٥

٣٣) ٦ب^{٢} + ٥ب − ٦

٣٤) ٨ك^{٢} − ١٩ك + ٩

حدّد العبارات الوحيدة الحد فيما يأتي، واكتب "نعم" أو "لا"، وفسّر إجابتك: (الدرس ٦-١)

٣٥) ١٢

٣٦) ٤س^{٣}

٣٧) أ − ٢ب

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي:

٣٨) ٩^{٢}

٣٩) ١٠^{٦}

٤٠) ٤^{٥}

٤١) (٨ف)^{٢}

٤٢) $(\frac{ل^{٣}}{٩})^{٢}$

٤٣) (١٠ص^{٢})^{٣}

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٩-٤

نظرية فيثاغورس

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أحل مسائل باستعمال نظرية فيثاغورس.
- أحدّد إذا كان المثلث المُعطى قائم الزاوية أم لا.

المفردات

الوتر

الساق

المعكوس

ثلاثية فيثاغورس

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا ؟

تُقاس أجهزة التلفاز بطول قطر شاشاتها، حيث يمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد قياس القطر إذا كان ارتفاع الشاشة وعرضها معلومين.

نظرية فيثاغورس: يُسمّى الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث القائم **وترًا**، وهو أطول الأضلاع في المثلث ويسمّى كلٌّ من الضلعين الآخرين **ساقًا**.

مفهوم أساسي — نظرية فيثاغورس

أضف إلى مطويتك

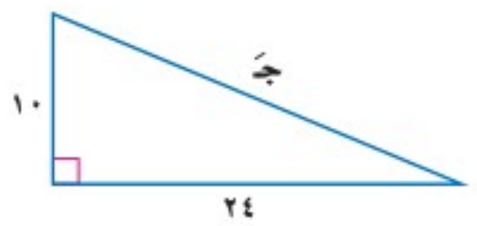
التعبير اللفظي: إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي ضلعيه (ساقيه).

الرموز: $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

مثال ١ إيجاد طول ضلع في مثلث قائم

أوجد طول الضلع المجهول في كل مما يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

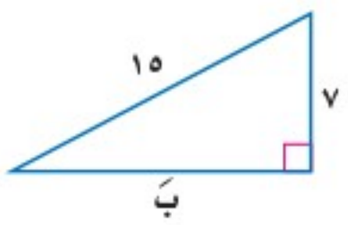
أ)



$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$	نظرية فيثاغورس
$جـ^٢ = ١٠^٢ + ٢٤^٢$	أ = ١٠، ب = ٢٤
$جـ^٢ = ١٠٠ + ٥٧٦$	ربّع
$جـ^٢ = ٦٧٦$	بسّط
$جـ = \pm\sqrt{٦٧٦}$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$جـ = \pm ٢٦$	$(\pm ٢٦)^٢ = ٦٧٦$

بما أن طول الضلع لا يكون سالبًا؛ لذا فإن طول الضلع المجهول هو ٢٦ وحدة.

ب)



$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$	نظرية فيثاغورس
$١٥^٢ = ٧^٢ + ب^٢$	جـ = ١٥، أ = ٧
$٢٢٥ = ٤٩ + ب^٢$	ربّع
$١٧٦ = ب^٢$	اطرح ٤٩ من كلا الطرفين
$ب = \pm\sqrt{١٧٦}$	أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين
$ب \approx \pm ١٣,٢٧$	استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt{١٧٦}$

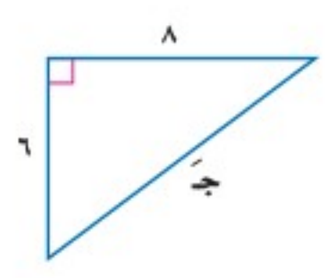
فيكون الطول المجهول هو ١٣,٢٧ وحدة تقريبًا.

إرشادات للدراسة

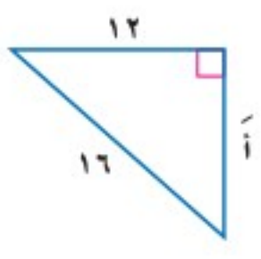
في المثلث أ ب جـ يُرمز للضلع المقابل للزاوية أ بالرمز أ، والمقابل للزاوية ب بالرمز ب، والمقابل للزاوية جـ بالرمز جـ.

تحقق من فهمك

١أ)



١ب)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٢ من واقع الحياة — إيجاد طول ضلع في مثلث قائم

إبحار: يكون شراع الزورق النهري على صورة مثلثٍ قائم الزاوية كما في الشكل المجاور، أوجد ارتفاع هذا الشراع.

$٦^{٢} = ع^{٢} + ٣^{٢}$ — نظرية فيثاغورس

$٣٦ = ع^{٢} + ٩$ — ربّع

$٢٧ = ع^{٢}$ — اطرح ٩ من كلا الطرفين

$ع \approx \pm ٥,٢$ — أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$ع \approx ٥,٢$ — استعمل القيمة الموجبة

ارتفاع الشراع ٢ , ٥ أمتار تقريبًا.

تحقق من فهمك

٢) لنفرض أن طول أطول ضلع في الشراع ٩ م، وطول أقصر ضلع فيه ٤ م. فأوجد ارتفاع الشراع.

الربط مع الحياة

الزورق النهري زورق شراعي يتوسطه صارٍ عمودي على سطحه يثبت تقريبًا في الثلث الأول من مقدمته. ويتصل بهذا الصاري أفقيًّا عمود آخر يسمى البومة يكوّن قاعدة للشراع المثلث على الصاري.

وللقارب شراعان: أمامي؛ وهو الصغير، وخلفي وهو الشراع الرئيسي.

المثلث القائم الزاوية: إذا استُبدل الفرض والنتيجة أحدهما مكان الآخر في العبارة الشرطية (إذا كان فإن)، فإن نتيجة ذلك سيكون **معكوس** العبارة الأصلية. ويمكن استعمال معكوس نظرية فيثاغورس لتحديد إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا.

مفهوم أساسي — معكوس نظرية فيثاغورس

أضف إلى مطويتك

إذا كانت الأطوال أ، ب، جـ لأضلاع مثلث تحقق المعادلة $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$، فإن المثلث قائم الزاوية.

وإذا كانت $جـ^{٢} \neq أ^{٢} + ب^{٢}$، لا يكون المثلث قائم الزاوية .

ثلاثية فيثاغورس: مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة تحقق المعادلة $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$، حيث جـ أكبر هذه الأعداد. ومن الأمثلة على ذلك "٣، ٤، ٥"، "٥، ١٢، ١٣". وتحقق مضاعفات ثلاثيات فيثاغورس أيضًا معكوس نظرية فيثاغورس؛ لذا فإن "٦، ٨، ١٠" أيضًا من ثلاثيات فيثاغورس.

مثال ٣ — التحقق من أن المثلث قائم الزاوية

حدّد إذا كانت الأطوال "٩، ١٢، ١٦" يمكن أن تشكِّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا.

بما أن طول الضلع الأكبر ١٦، فإن جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢ .

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$ — نظرية فيثاغورس

$١٦^{٢} \stackrel{؟}{=} ٩^{٢} + ١٢^{٢}$ — عوّض جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢

$٢٥٦ \stackrel{؟}{=} ٨١ + ١٤٤$ — ربّع

$٢٥٦ \neq ٢٢٥$ — اجمع

بما أن $جـ^{٢} \neq أ^{٢} + ب^{٢}$، فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكّل مثلثًا قائم الزاوية.

تحقق من فهمك

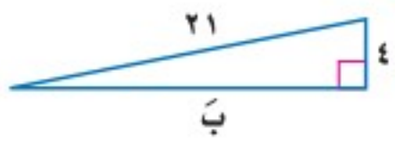
حدّد إذا كانت مجموعة الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

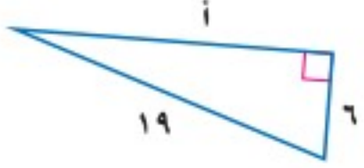
٣أ) ٣٠، ٤٠، ٥٠ **٣ب)** ٦، ١٢، ١٨

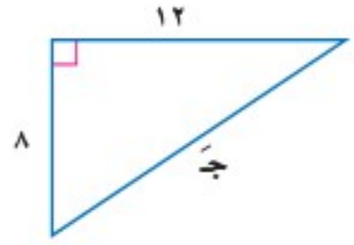
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

مثال ١ أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ مثلث ممّا يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم الأمر.

١) 

٢) 

٣) 

مثال ٢ ٤) **كرة قدم:** يوضح الشكل المجاور ملعب كرة قدم مستطيل الشكل.

أ) إذا كان طول قطر الملعب ١٢٥ م، وعرضه ٧٥م، فكم طوله؟

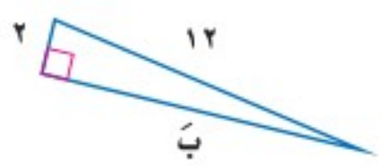
ب) في لحظة معينة، كما في الشكل، مرَّر حارس المرمى الكرة إلى الظهير الأيمن الذي يبعد عنه مسافة ٣٠ م، فركلها مباشرة إلى لاعب الوسط الهجومي الذي يقف على مسافة ٧٢ م منه. فكم يبعد لاعب الوسط الهجومي عن حارس مرماه؟

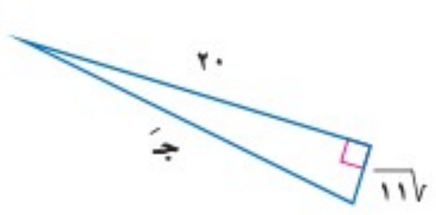
مثال ٣ **حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:**

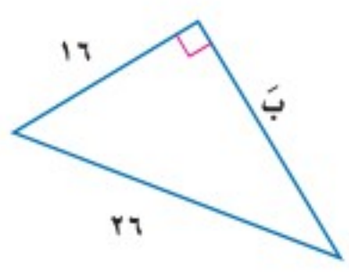
٥) ٨، ١٢، ١٦ ٦) ٧، ٢٤، ٢٥ ٧) ١٥، ٢٥، ٤٥

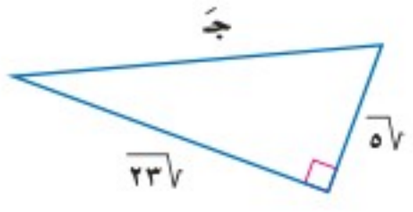
تدرب وحل المسائل

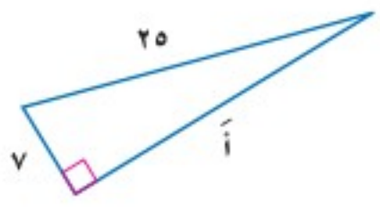
مثال ١ أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ مثلث ممّا يأتي، وقرِّب الحل إلى أقرب جزء من مئةٍ، إذا لزم الأمر:

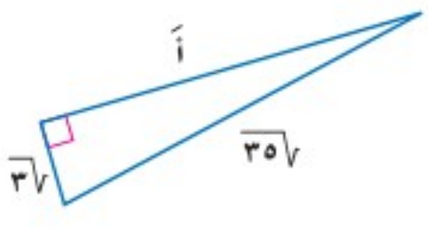
٨) 

٩) 

١٠) 

١١) 

١٢) 

١٣) 

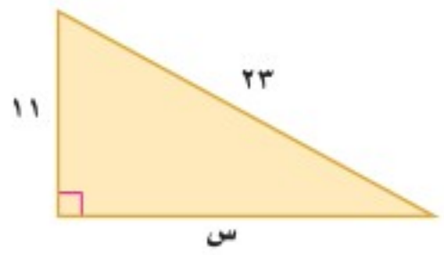
مثال ٢ ١٤) **تلفاز:** أراد مهند شراء طاولة مستطيلة يضع عليها تلفازًا، قطر قاعدته ٢٧ بوصة، فإذا كان بعدا الطاولة ٢٠ بوصة و٢٦ بوصة. فهل تناسب الطاولة التلفاز؟ فسّر إجابتك.

مثال ٣ **حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا، ثم حدّد إذا كانت تشكّل ثلاثية فيثاغورس:**

١٥) ٩، ٤٠، ٤١ ١٦) ٣، ٢√١٠، √٤١ ١٧) √٥، ٧، ١٤

١٨) ٨، ٥,٣١، ٥,٣٢ ١٩) √٦٥، ٢√٦، √٩٧ ٢٠) ١٧، ٣٣، ٩٨

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443



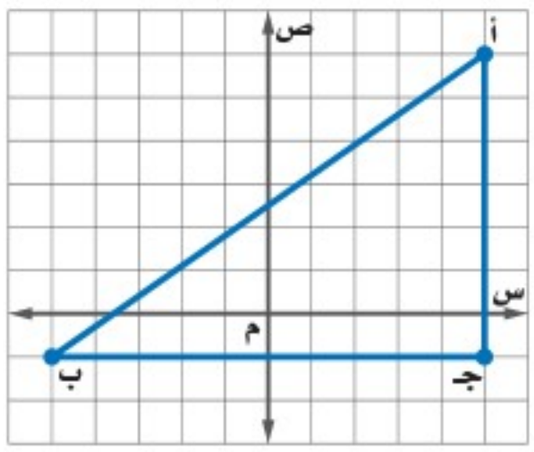
٢١) **هندسة:** أجب عن الأسئلة الآتية اعتمادًا على المثلث المجاور:

أ) ما قيمة س؟

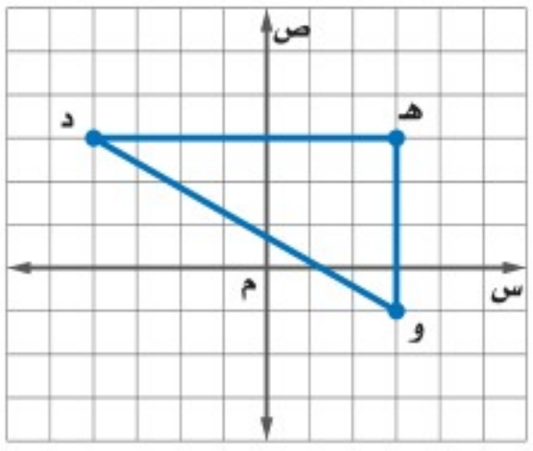
ب) ما مساحة المثلث؟

أوجد طول الوتر في المثلثين الآتيين وقرِّب الحل إلى أقرب جزء من مئة:

٢٢)

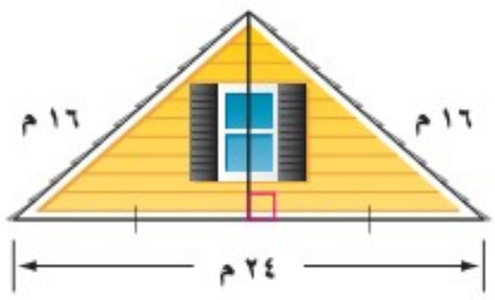


٢٣)

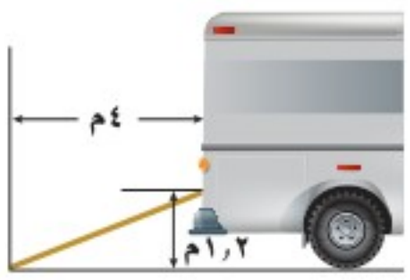


٢٤) **هندسة:** أوجد طول قطر مكعب طول ضلعه ٥ سم.

٢٥) **منزل:** يمثّل الشكل المجاور الواجهة العلوية لمنزل عرضها ٢٤ مترًا، وطولا الضلعين المائلين لها ١٦ مترًا. أوجد ارتفاع الواجهة مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.



٢٦) **شاحنات:** صنع أحمد منحدرًا خشبيًّا لسحب مجموعة صناديق على عربة ذات عجلات من مخزنه إلى الشاحنة كما في الشكل. فما طول المنحدر؟



٢٧) **هندسة:** أوجد طول قطر مربع مساحته ٢٤٢ سم^{٢}.

إذا كان جَـ يمثِّل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث ممّا يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة إن كان ذلك ضروريًّا:

٢٨) أَ = س، بَ = س + ٤١، جَـ = ٨٥

٢٩) أَ = ١٢، بَ = س − ٢، جَـ = س

٣٠) أَ = س − ٤٧، بَ = س، جَـ = س + ٢

٣١) أَ = س − ٣٢، بَ = س − ١، جَـ = س

٣٢) **هندسة:** طول أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية أقل بمقدار ٨ سم عن طول الضلع الآخر، وطول وتره ٣٠ سم. أوجد طول كلٍّ من ضلعيه.

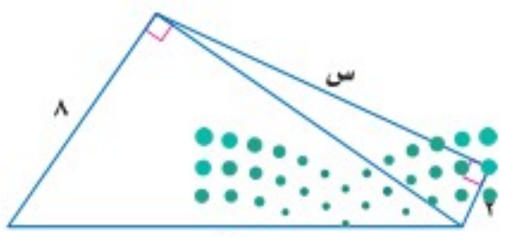
الربط مع الحياة

يقع باب الكعبة المشرفة في الجهة الشرقية منها، والباب الحالي هدية من الملك خالد بن عبدالعزيز، وصُنع من ٣٠٠ كيلوجرامًا من الذهب النقي عيار ٩٩,٩٩

٣٣) **الكعبة المشرفة:** باب الكعبة المشرفة مصنوع من الذهب الخالص على هيئة مستطيل أبعاده التقريبية ٢,٣م، ١,٧م. فكم طول قطره؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٣٤) **تحدٍّ:** أوجد قيمة س في الشكل المجاور؟



٣٥) **تبرير:** أعطِ مثالًا مضادًّا للعبارة الآتية:

"تتساوى مساحَتَا مثلثين قائمَي الزاوية إذا تساوى طولا وترَيهما".

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٣٦) **اكتشف الخطأ:** يحاول حسام وحازم تحديد إن كانت الأعداد "٣٦، ٧٧، ٨٥" تشكّل ثلاثية فيثاغورس. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

حسام

$٣٦^٢ + ٧٧^٢ \stackrel{؟}{=} ٨٥^٢$

$١٢٩٦ + ٥٩٢٩ \stackrel{؟}{=} ٧٢٢٥$

$٧٢٢٥ = ٧٢٢٥$

نعم

حازم

$٣٦^٢ + ٨٥^٢ \stackrel{؟}{=} ٧٧^٢$

$١٢٩٦ + ٧٧٢٥ \stackrel{؟}{=} ٥٩٢٩$

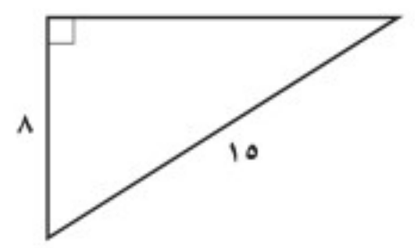
$٩٠٢١ \neq ٥٩٢٩$

لا

٣٧) **اكتب:** وضّح كيف تحدّد إن كانت أطوال ثلاث قطع مستقيمة تشكّل مثلثًا قائم الزاوية.

تدريب على اختبار

٣٨) **هندسة:** أوجد الطول المجهول في الشكل أدناه.



أ) -١٧ ج) $\sqrt{١٦١}$

ب) $-\sqrt{١٦١}$ د) ١٧

٣٩) ما حل المعادلة: $س + ١ = \sqrt{س + ١}$ ؟

أ) ٠,٣ ج) ٣

ب) صفر د) ليس لها حل

٤٠) **إجابة قصيرة:** يتقاضى سبّاك ٤٠ ريالاً عن الساعة الأولى إذا عمل خارج محله، بالإضافة إلى مبلغ ٨ ريالات عن كل $\frac{١}{٢}$ ساعة إضافية. فإذا عمل السبّاك ٤ ساعات، فكم ريالاً يتقاضى؟

مراجعة تراكمية

حُلَّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقَّق من صحة الحل: (الدرس ٩-٣)

٤١) $\sqrt{١٠س} = ١٠$

٤٢) $\sqrt{س + ١} + ٢ = ٤$

٤٣) $\sqrt{س} - ٣ = \sqrt{١٥ - س}$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-٢)

٤٤) $\sqrt{١٨} - \sqrt{٤}٢$

٤٥) $\sqrt{٣}٥ - \sqrt{٥}٣ + \sqrt{٩}٥$

٤٦) $\sqrt{٤}٣ + \sqrt{٦}١٢$

أوجد ناتج الضرب في كل ممّا يأتي: (الدرس ٦-٦)

٤٧) (ب + ٨)(ب + ٢)

٤٨) (س – ٤)(س – ٩)

٤٩) (ص + ٤)(ص – ٨)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: حُلَّ كلًّا من التناسبات الآتية:

٥٠) $\frac{س}{٥} = \frac{١٢}{٣}$

٥١) $\frac{٣}{٤} = \frac{١٢}{س}$

٥٢) $\frac{٥}{٤} = \frac{١٠}{س}$

٥٣) $\frac{٣}{٥} = \frac{١٢}{س + ٨}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

اختبار منتصف الفصل

الدروس ٩-١ إلى ٩-٤

بسّط كل عبارةٍ فيما يأتي: (الدرس ٩-١)

١) $٢\sqrt{٢٥}$

٢) $\sqrt{١٢} \cdot \sqrt{٨}$

٣) $\sqrt{٧٢ س ص^{٥} ع^{٦}}$

٤) $\frac{٣}{\sqrt{٥}+١}$

٥) $\frac{١}{\sqrt{٧}-٥}$

٦) **اختيار من متعدد:** أيُّ القيم التالية تساوي $\sqrt{\frac{١٦}{٣٢}}$ ؟ (الدرس ٩-١)

أ) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ب) ٢ د) ٤

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-٢)

٧) $٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢}$

٨) $٣\sqrt{١١} - \sqrt{١١}$

٩) $٦\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٥٠}$

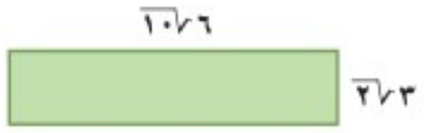
١٠) $\sqrt{٤٨} - \sqrt{٢٧}$

١١) $٤\sqrt{٣} (٢\sqrt{٦})$

١٢) $٣\sqrt{٢٠} (٢\sqrt{٥})$

١٣) $(\sqrt{٥} + \sqrt{٧})(\sqrt{٢٠} + \sqrt{٣})$

١٤) **هندسة:** أوجد مساحة المستطيل أدناه. (الدرس ٩-٢)



حُلّ كل معادلةٍ فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدرس ٩-٣)

١٥) $\sqrt{٥س - ١} = ٤$

١٦) $\sqrt{ب - ٢} = ٦$

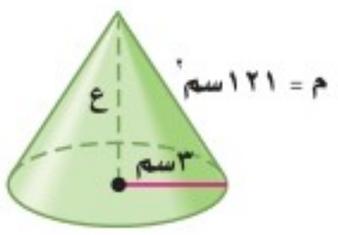
١٧) $\sqrt{١٥ - س} = ٤$

١٨) $\sqrt{٣س^{٢} - ٣٢} = س$

١٩) $\sqrt{٢س - ١} = ٢س - ٧$

٢٠) $\sqrt{س + ١} + ٢ = ٤$

٢١) **هندسة:** قانون المساحة الجانبية لمخروط، يعطى بالصيغة $م = ط\ نق \sqrt{نق^{٢} + ع^{٢}}$، حيث نق طول نصف قطر القاعدة، ع ارتفاع المخروط، استخدم هذه الصيغة لحساب ارتفاع المخروط أدناه. (الدرس ٩-٣)



٢٢) **اختيار من متعدد:** أيُّ الأطوال التالية تشكِّل أطوال أضلاع مثلثٍ قائم الزاوية؟ (الدرس ٩-٤)

أ) ٩، ١٢، ١٥

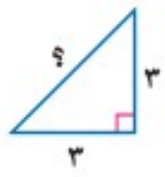
ب) ٦، ٦، ١٢

جـ) ٣، ٤، ٨

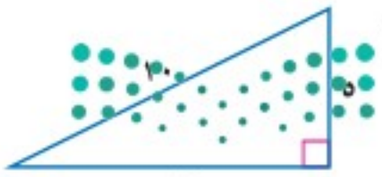
د) ٣، ٥، ٣

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلثٍ ممَّا يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ إذا لزم الأمر: (الدرس ٩-٤)

٢٣)



٢٤)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

٩-٥ المسافة بين نقطتين

فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس.

والآن

- أجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- أجد نقطة المنتصف بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

المفردات

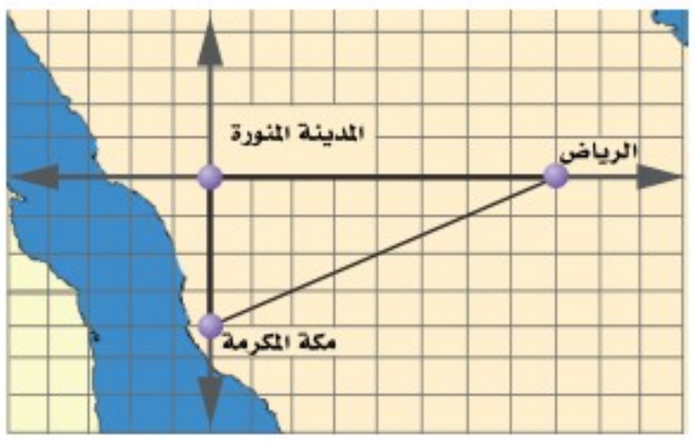
قانون المسافة بين نقطتين

نقطة المنتصف

قانون نقطة المنتصف

لماذا ؟

تستعمل طائرة الإنقاذ المروحية نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) لحساب المسافة المباشرة بين موقعين. وتستطيع التحليق لمسافة ٩٠٠ كيلومتر قبل إعادة تزويدها بالوقود. إذا كانت مهمة الطائرة نقل شخص من مكة المكرمة إلى الرياض، و إذا افترضت أن المدينة المنورة هي نقطة الأصل، ومكة المكرمة عند النقطة (٠، −٤٠٠)، والرياض عند النقطة (٨٠٠، ٠). فهل يمكن للطائرة إكمال المهمة دون التزود بالوقود في أثناء الطريق؟



قانون المسافة بين نقطتين: يستعمل نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) **قانون المسافة بين نقطتين** الذي يعتمد على نظرية فيثاغورس.

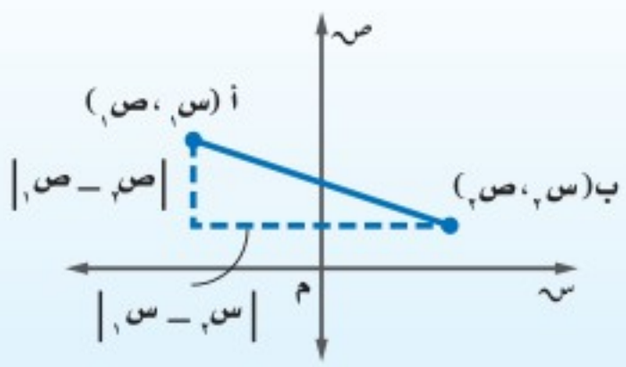
مفهوم أساسي — المسافة بين نقطتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المسافة ف بين نقطتين إحداثياتها $(س_١، ص_١)$، $(س_٢، ص_٢)$ يُعبر عنها بالقانون :

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

النموذج:



يمكنك استعمال هذا القانون لإيجاد المسافة بين أي نقطتين على المستوى الإحداثي.

مثال ١ — المسافة بين نقطتين

أوجد المسافة بين النقطتين (٥، ٣) ، (١، −٢).

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(١ - ٥)^٢ + (-٢ - ٣)^٢}$ $(س_١، ص_١) = (٥، ٣)$ ، $(س_٢، ص_٢) = (١، -٢)$

$= \sqrt{(-٤)^٢ + (-٥)^٢}$ بسّط

$= \sqrt{١٦ + ٢٥}$ ربّع

$= \sqrt{٤١} = ٦,٤$ تقريبًا بسّط

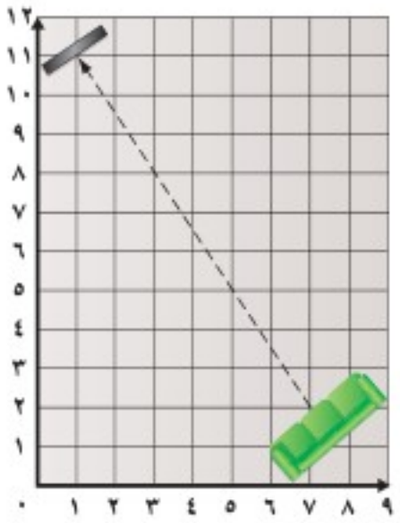
تحقق من فهمك

١أ) (٤، ٢)، (−٣، −١).

١ب) (−٧، −٢) ، (−٥، −٨)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٢ من واقع الحياة — استعمال قانون المسافة بين النقطتين



ترفيه: يمتلك صالح مسرحًا منزليًّا. ويوضع التلفاز والمقاعد عادة في ركنين متقابلين من الغرفة؛ حيث يوصي صانعو التلفاز المشاهدين بالجلوس بعيدًا عنه مسافة لا تقل عن ١٣ قدمًا من أجل السلامة. فإذا كان طول كل مربع في المستوى المجاور ١ قدم، فهل غرفة صالح مناسبة لوضع التلفاز بداخلها؟

مقدمة شاشة التلفاز عند النقطة (١، ١١)، وأول مقعد عند النقطة (٧، ٢).

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ — قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(١ - ٧)^٢ + (١١ - ٢)^٢}$ — عوّض $(س_١، ص_١) = (١، ١١)$ ، $(س_٢، ص_٢) = (٧، ٢)$

$= \sqrt{٦^٢ + (-٩)^٢}$ — بسّط

$= \sqrt{١١٧} = ١٠,٨$ أقدام تقريبًا.

لا، اتساع الغرفة ليس كافيًا لهذا الجهاز.

تحقق من فهمك

٢) يوصي صانعو مكبرات الصوت (الميكروفونات) بوضعها على مسافة لا تقل عن ٨ أقدام من مكان الجلوس. فإذا وضع ميكروفون في النقطة (٠، ٩)، فهل غرفة صالح مناسبة لوضع الجهاز؟ فسّر ذلك.

يمكنك استعمال قانون المسافة بين نقطتين عند معرفة المسافة بينهما ومعرفة إحداثيات إحداهما لإيجاد الإحداثي المجهول للنقطة الأخرى.

الربط مع الحياة

بدأ البث الرسمي لتلفزيون المملكة لأول مرة في التاسع من ربيع الأول ١٣٨٥ هـ (٧يوليو ١٩٦٥م) من مدينتي الرياض وجدة. ويبلغ عدد قنواته حاليًّا ٩ قنوات تغطي مجالات الثقافة المختلفة.

مثال ٣ — إيجاد الإحداثي المجهول

أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٤، ٧)، (أ، ٣) تساوي ٥ وحدات.

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ — قانون المسافة بين نقطتين

$٥ = \sqrt{(أ - ٤)^٢ + (٣ - ٧)^٢}$ — $(س_١، ص_١) = (٤، ٧)$ ، $(س_٢، ص_٢) = (أ، ٣)$، $ف = ٥$

$٥ = \sqrt{(أ - ٤)^٢ + (-٤)^٢}$ — بسّط

$٥ = \sqrt{أ^٢ - ٨أ + ٣٢}$ — ربّع وبسّط

$٢٥ = أ^٢ - ٨أ + ٣٢$ — ربّع كلا الطرفين

$٠ = أ^٢ - ٨أ + ٧$ — اطرح ٢٥ من كلا الطرفين

$٠ = (أ - ١)(أ - ٧)$ — حلّل

$أ - ١ = ٠$ أو $أ - ٧ = ٠$ — خاصية الضرب الصفري

$أ = ١$ أو $أ = ٧$ — حل كل معادلة

إرشادات للدراسة

قيمتان ممكنتان

عند إيجاد الإحداثي المجهول، يكون أمامك خياران؛ لأن النقطة يمكن أن تكون لها البعد نفسه، ومن اتجاهين مختلفين.

تحقق من فهمك

٣) أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٢، أ)، (-٦، ٢٠) تساوي ١٠ وحدات.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

قانون نقطة المنتصف: تُسمى النقطة الواقعة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة وتنتمي إلى هذه القطعة **نقطة المنتصف**. ويمكنك إيجاد إحداثيي نقطة المنتصف باستعمال **قانون نقطة المنتصف**.

مفهوم أساسي

قانون نقطة المنتصف

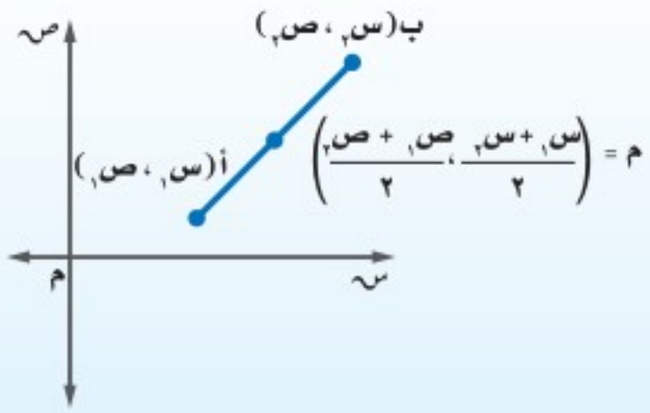
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يستعمل القانون:

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

لإيجاد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي نهايتاها النقطتان:
(س١، ص١) وَ (س٢، ص٢).

النموذج:



تنبيه!

قانون نقطة المنتصف
انتبه إلى أنك تجمع ولا تطرح عند استعمال قانون نقطة المنتصف.

مثال ٤ إيجاد نقطة المنتصف

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين: (−١، −٢)، (٣، −٤) .

$$م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$ قانون نقطة المنتصف

$$= \left(\frac{-١ + ٣}{٢}، \frac{-٢ + (-٤)}{٢}\right)$$ (س١، ص١) = (−١، −٢) ، (س٢، ص٢) = (٣، −٤)

$$= \left(\frac{٢}{٢}، \frac{-٦}{٢}\right)$$ بسّط

$$= (١، -٣)$$ بسّط

تحقق من فهمك

٤أ) (١٢، ٣)، (−٨، ٣) **٤ب)** (٠، ٠)، (٥، ١٢) **٤جـ)** (٦، ٨)، (٣، ٤)

تأكد

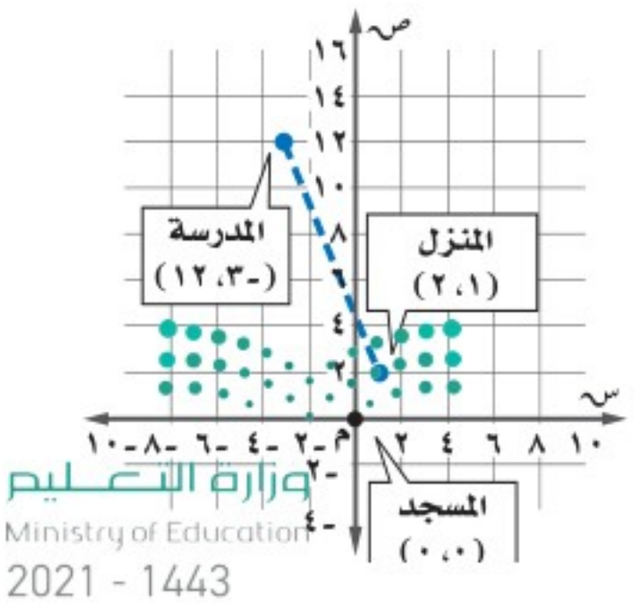
مثال ١ أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١) (٦، −٢)، (١٢، ٨) **٢)** (٤، ٨)، (−٣، −٦) **٣)** (−٢، −٤)، (−٥، −٣)

مثال ٢ **٤) مسافات:** في المستوى الإحداثي المجاور، يقع منزل عمر عند النقطة (١ ، ٢)، والمدرسة عند النقطة (−٣ ، ١٢). فإذا كان المسجد يقع عند النقطة (٠ ، ٠)، وطول ضلع كل مربع في المستوى الإحداثي كيلومتر واحد، فأوجد:

أ) المسافة بين منزل عمر والمدرسة.

ب) المسافة بين منزل عمر والمسجد.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٣ في الأسئلة ٥–٨ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما.

٥) (–٥، أ)، (٣، ١)؛ ف = $\sqrt{٨٩}$

٦) (٦، أ)، (٥، ٠)؛ ف = $\sqrt{١٧}$

٧) (٥، ٨)، (أ، ٢)؛ ف = ٣$\sqrt{٥}$

٨) (أ، ٦)، (–٦، ٢)؛ ف = ٤$\sqrt{١٠}$

مثال ٤ أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٩) (٥، –١٠)، (٥، ٨)

١٠) (٢، –٢)، (٦، ٢)

١١) (٥، ٠)، (٠، ٣)

١٢) (٣، –١٧)، (٢، –٨)

١٣) (–٢، ٢)، (٤، ١٠)

١٤) (٣، ١٠)، (٣، ٣)

تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١٥) (٥، ٨)، (٥، ٧)

١٦) (٦، –٩)، (٩، –٩)

١٧) (٣، –٣)، (٧، ٢)

١٨) (–٧، ٨)، (٣، ١٠)

١٩) (–١١، ٩)، (٣، –٤)

٢٠) (–٣، ٥)، (٥، –٣)

مثال ٢

٢١) **تحديد مواقع:** أراد سعد وجمال أن يلتقيا في مطعم مشويات كما في التمثيل المجاور فاستعمل سعد قاربه للوصول إلى المطعم، في حين استعمل جمال سيارته، علمًا بأن طول ضلع كل مربع من المستوى الإحداثي يمثل كيلومترًا واحدًا.

أ) ما المسافة التي قطعها سعد؟

ب) ما المسافة التي قطعها جمال؟

جـ) ما النسبة بين المسافة التي قطعها سعد إلى المسافة التي قطعها جمال؟

مثال ٣ في الأسئلة ٢٢–٢٥ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ)، مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما:

٢٢) (–٩، –٢)، (أ، ٥)؛ ف = ٧

٢٣) (أ، –٦)، (–٥، ٢)؛ ف = ١٠

٢٤) (أ، ٠)، (٣، ١)؛ ف = $\sqrt{٢}$

٢٥) (٤، أ)، (٨، ٤)؛ ف = ٢$\sqrt{٥}$

مثال ٤ أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٢٦) (٠، ٢)، (٧، ٣)

٢٧) (٥، –٢)، (٣، –٦)

٢٨) (–٤، ٠)، (٠، ١٤)

٢٩) (١٠، –٣)، (–٨، –٥)

٣٠) (–٥، ٥)، (٣، –٣)

٣١) (–١٦، –٧)، (–٤، –٣)

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

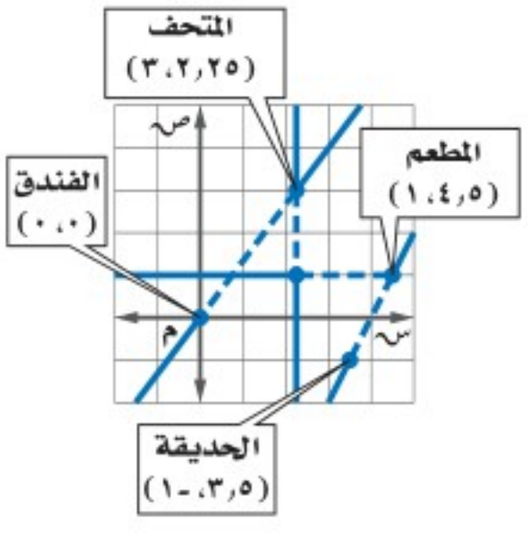
٣٢) (٤، ٢)، $\left(٦، -\frac{٢}{٣}\right)$

٣٣) $\left(\frac{٤}{٥}، -١\right)$، $\left(٢، -\frac{١}{٢}\right)$

٣٤) (٤$\sqrt{٥}$، ٧)، (٦$\sqrt{٥}$، ١)

٣٥) **هندسة:** أوجد محيط الشكل الرباعي أ ب جـ د الذي رؤوسه أ(–٣، –٤)، ب(–١، ٤)، جـ (٤، ٥)، د(٦، –٥)، ثم قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443



٣٦) **سياحة:** يستعمل أحمد نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) كما في التمثيل المجاور للانتقال من الفندق إلى المتحف الوطني وإلى المطعم ثم إلى الحديقة العامة، ويمثّل طول ضلع كل مربع من المستوى الإحداثي ٥٠٠ م. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

أ) ما المسافة التي يقطعها من الفندق إلى المتحف؟

ب) ما المسافة بين المتحف والمطعم؟

جـ) أوجد المسافة المباشرة من الحديقة العامة إلى الفندق.

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

٣٧) (٢٥ ,٤، ٥ ,٢)، (٥ ,٢، -٣)

٣٨) $\left(٥، -\frac{١}{٢}\right)$، $\left(-٣، \frac{٥}{٢}\right)$

٣٩) $\left(\frac{٢}{٥}، -\frac{١}{٥}\right)$، $\left(\frac{١}{٣}، \frac{٥}{٢}\right)$

مسائل مهارات التفكير العليا

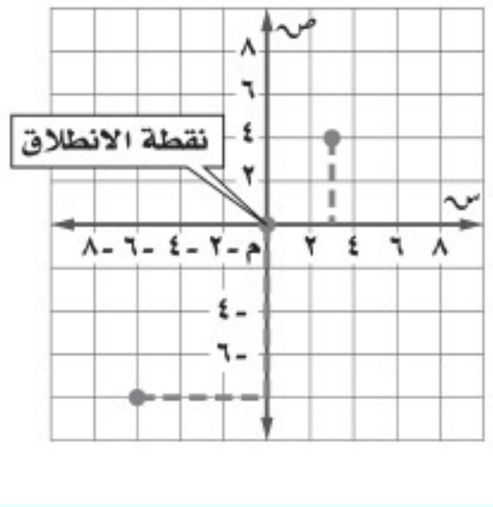
٤٠) **تحدٍّ:** إذا كانت أ (-٧، ٣)، ب (٤، ٠)، جـ (-٤، ٤) إحداثيات رؤوس مثلث، فناقش طريقتين مختلفتين لتحديد ما إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية أم لا.

٤١) **تبرير:** فسّر لماذا تكون هناك قيمتان ممكنتان عند البحث عن الإحداثي المجهول لنقطة عند إعطاء إحداثيات نقطتين والمسافة بينهما.

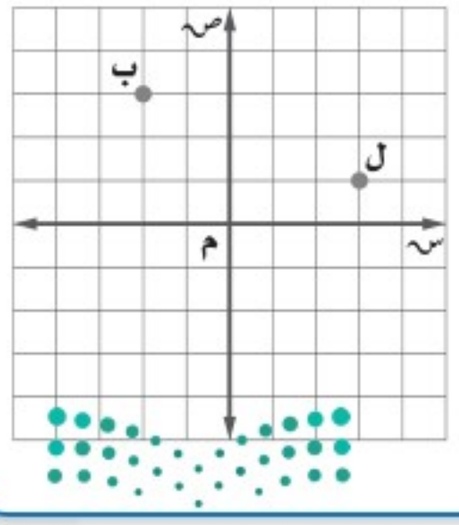
٤٢) **اكتب:** وضّح كيف يرتبط قانون نقطة المنتصف، بإيجاد المتوسط الحسابي.

تدريب على اختبار

٤٣) **إجابة قصيرة:** انطلق قاربان من الموقع نفسه وفي الوقت نفسه كما في التمثيل أدناه، فاتجه أحدهما شرقًا ثم شمالًا. أما الآخر فاتجه جنوبًا ثم غربًا. ما المسافة بينهما؟



٤٤) إذا كانت (ل) تمثل منارة، وَ(ب) سفينة كما في التمثيل أدناه، ويوجد قارب صيد في منتصف المسافة بين ل وَ ب، فأيّ الإحداثيات الآتية تمثّل موقع القارب؟



أ) $\left(٢، \frac{١}{٢}\right)$

ب) $\left(١، \frac{١}{٢}\right)$

جـ) $\left(\frac{١}{٢}، ٢\right)$

د) $\left(\frac{١}{٢}، ٥\right)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

إذا كان جَـ يمثّل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرِّب الحل إلى أقرب جزء من مئة: (الدرس ٩-٤)

٤٥) أ = ١٦، ب = ٦٣، جَـ = ؟

٤٦) ب = ٣، أ = $\sqrt{١١٢}$، جَـ = ؟

٤٧) جَـ = ١٤، أ = ٩، ب = ؟

٤٨) **طيران:** يمكن تمثيل العلاقة بين طول طائرة (ل) بالأقدام، والكتلة المناسبة لأجنحتها (ب) بالأرطال بالمعادلة ل=$\sqrt{ك ب}$ ، حيث (ك) ثابت التناسب، أوجد قيمة (ك) لهذه الطائرة إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس ٩-٣)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حُلَّ كلًّا من التناسبات الآتية، مقربًا الناتج إلى قرب جزءٍ من مئةٍ إذا لزم:

٤٩) $\frac{٢}{١٠} = \frac{٤}{د}$

٥٠) $\frac{ف}{١٥} = \frac{٦}{٥}$

٥١) $\frac{هـ}{٢١} = \frac{٢٠}{٨}$

٥٢) $\frac{٦}{٧} = \frac{٧}{جـ}$

٥٣) $\frac{٩}{م} = \frac{١٦}{٧}$

٥٤) $\frac{ب}{٢} = \frac{٤٥}{٦٨}$

٩-٦ المثلثات المتشابهة

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

لماذا ؟

لقياس ارتفاع سارية علم المدرسة يحتاج فهد إلى قياس طول ظله وطول ظل السارية، ثم استعمال المثلثات المتشابهة والقياسات غير المباشرة.

المثلثات المتشابهة: تسمى المثلثات التي لها الشكل نفسه **المثلثات المتشابهة**، إلا أنه ليس من الضروري أن تكون لها أطوال الأضلاع نفسها. والرمز ~ يُستعمل ليشير إلى مثلثين متشابهين. وتُكتب رؤوس المثلثات المتشابهة عادة بالترتيب للدلالة على الأجزاء المتناظرة.

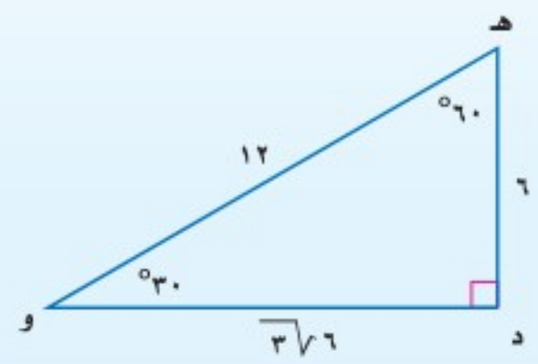
مفهوم أساسي المثلثات المتشابهة

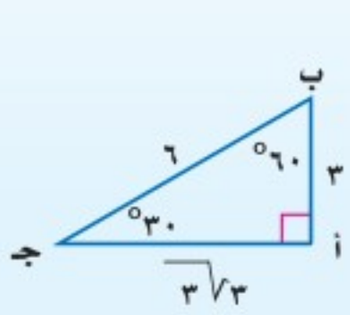
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تشابه مثلثان، فإن قياسات زواياهما المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

مثال: إذا كان △ أ ب جـ ~ △ د هـ و، فإن ق ∠ أ = ق ∠ د، ق ∠ جـ = ق ∠ و، ق ∠ ب = ق ∠ هـ.

$$\frac{\text{أب}}{\text{دهـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{د و}} = \frac{١}{٢}.$$

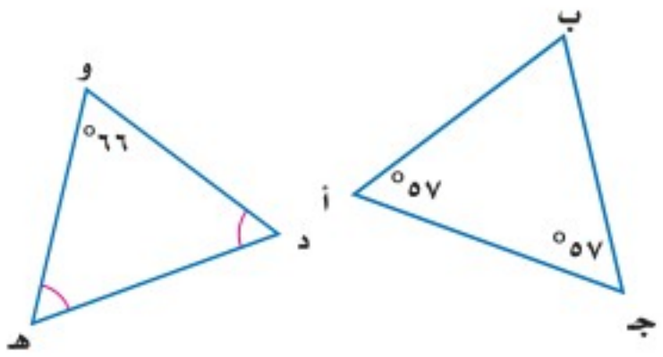




يمكن استعمال المقارنة بين قياسات الزوايا المتناظرة لتحديد إن كان المثلثان متشابهين.

مثال ١ تحديد المثلثين المتشابهين

حدد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرِّر إجابتك:



قياس ∠ ب = ١٨٠ − (٥٧ + ٥٧) = ٦٦°.

في △ د هـ و، يتساوى ق ∠ د، مع ق ∠ هـ

ولتكن س = ق ∠ د = ق ∠ هـ

س + س + ٦٦ = ١٨٠	مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠
٢س = ١١٤	اطرح ٦٦ من كلا الطرفين
س = ٥٧	اقسم كلا الطرفين على ٢

ولذا فإن ق ∠ د = ٥٧°، ق ∠ هـ = ٥٧°. وبما أن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية، فإن △ هـ و د ~ △ أ ب جـ.

تحقق من فهمك

١) حدّد ما إذا كان △ أ ب جـ الذي فيه ق ∠ أ = ٦٨°، ق ∠ ب = ق ∠ جـ يشابه △ د هـ ف حيث ق ∠ هـ = ق ∠ ف = ٥٤°، وبرّر إجابتك.

فيما سبق

درست حل التناسبات.

والآن

- أحدّد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا.
- أجد العناصر المجهولة في مثلثين متشابهين.

المفردات

المثلثات المتشابهة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

يمكنك أيضًا استعمال المقارنة بين نسب أطوال الأضلاع المتناظرة؛ لتحديد إن كان المثلثان متشابهين.

قراءة الرياضيات

قياس الزاوية

ق ∠ أ يُقرأ: قياس الزاوية أ.

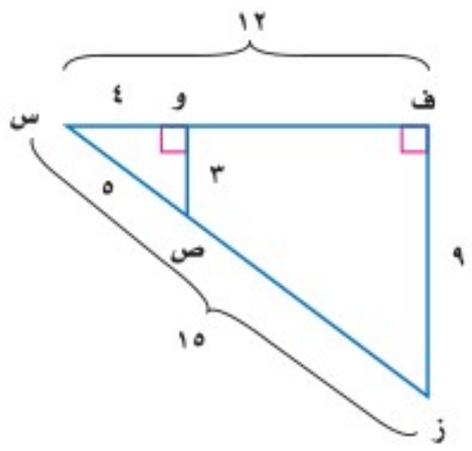
إرشادات للدراسة

المثلثات المتداخلة

في المثلثين المتداخلين يمكنك رسم كل منهما على حدة، مع التأكد من كون العناصر المتناظرة في الموقع نفسه، وضع إشارات لتوضيح الزوايا والأضلاع المتناظرة.

مثال ٢ تحديد المثلثين المتشابهين

حدّد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:



إذا كان △ ف س ز، △ و س ص متشابهين، فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

$$\frac{\text{ف س}}{\text{و س}} = \frac{١٢}{٤} = ٣ \text{ ، } \frac{\text{س ز}}{\text{س ص}} = \frac{١٥}{٥} = ٣ \text{ ، } \frac{\text{ف ز}}{\text{و ص}} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن △ ف س ز ~ △ و س ص.

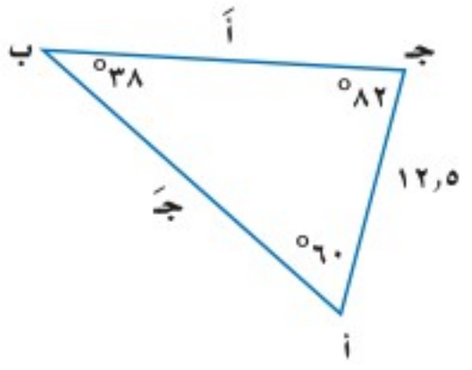
تحقق من فهمك

٢) حدّد ما إذا كان △ أ ب جـ والذي فيه أب = ٦، ب جـ = ١٦، أ جـ = ٢٠ يشابه △ ع ك ل، حيث ع ك = ٣، ك ل = ٨، ع ل = ٩. وفسّر إجابتك.

إيجاد قياسات العناصر المجهولة: يمكنك استعمال التناسب لإيجاد قياسات العناصر المجهولة، عندما تكون بعض أطوال أضلاع المثلثات المتشابهة معلومة.

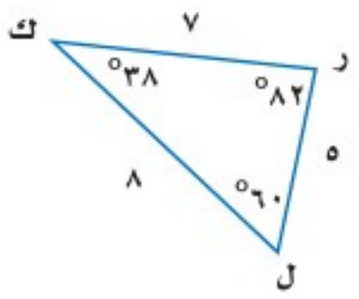
مثال ٣ إيجاد قياسات العناصر المجهولة

أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين الآتيين:



$\frac{\text{أب}}{\text{ل ك}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ل ر}}$	الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة
$\frac{\text{جَـ}}{٨} = \frac{١٢,٥}{٥}$	أب = جَـ، أ جـ = ١٢,٥، ل ك = ٨، ل ر = ٥
٥ جَـ = ١٠٠	اضرب تباديًّا
جَـ = ٢٠	اقسم على ٥

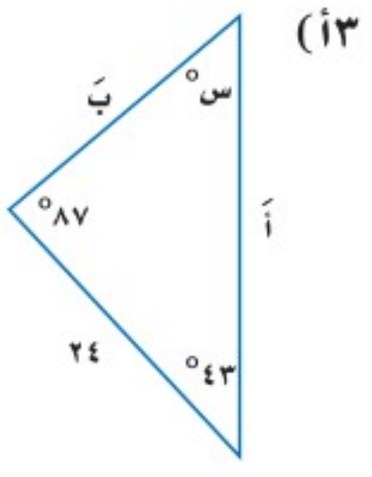
قياسات العناصر المجهولة ٢٠ ، ١٧,٥ .



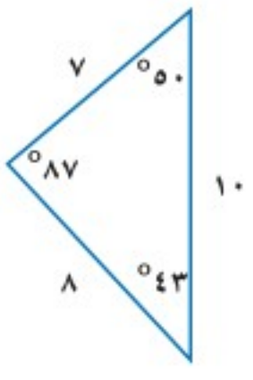
$\frac{\text{ب جـ}}{\text{ك ر}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ل ر}}$	الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة
$\frac{\text{أَ}}{٧} = \frac{١٢,٥}{٥}$	ب جـ = أَ، أجـ = ١٢,٥، ك ر = ٧، ل ر = ٥
٥ أَ = ٨٧,٥	اضرب تباديًّا
أَ = ١٧,٥	اقسم على ٥

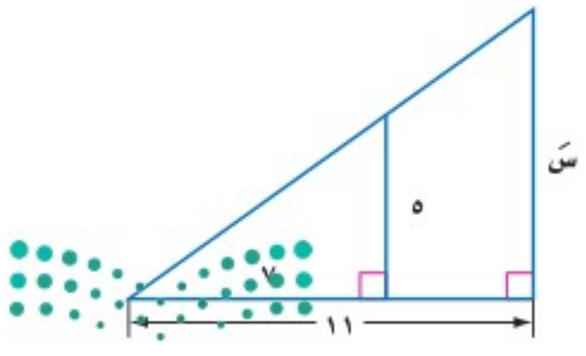
تحقق من فهمك

٣أ)



٣ب)

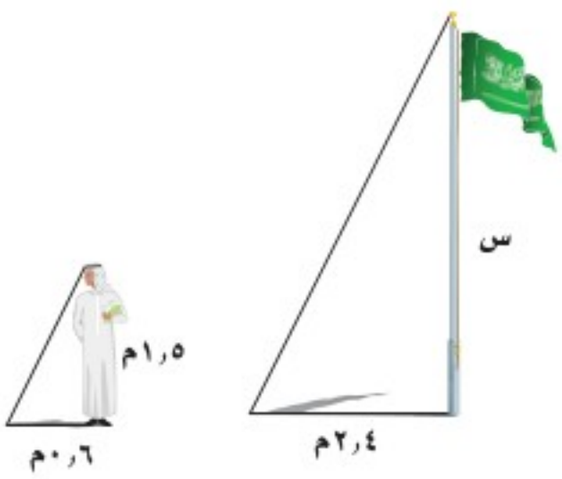




وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٤ من واقع الحياة

ظل: أراد سلطان قياس ارتفاع سارية العلم، فوقف بجانبها. إذا علمت أن طول سلطان متر و٥٠ سنتمترًا، وطول ظله ٦٠ سنتمترًا، وطول ظل السارية في تلك اللحظة متران و٤٠ سنتمترًا، فما ارتفاع السارية؟



افهم: أوجد ارتفاع سارية العلم.

خطّط: ارسم شكلاً للموقف.

حل: أشعة الشمس تشكّل مثلثات متشابهة. اكتب تناسبًا يقارن بين ارتفاعات الأجسام وأطوال ظلالها.

لتكن س= ارتفاع سارية العلم

ارتفاع السارية ← س / ١,٥ = ٢,٤ / ٠,٦ → طول ظل السارية

طول سلطان ← ١,٥ / س = ٠,٦ / ٢,٤ → طول ظل سلطان

٠,٦ س = ٣,٦

س= ٦ فيكون ارتفاع سارية العلم يساوي ٦ أمتار.

تحقق: عوّض عن س بـ ٦.

$\frac{٦}{١,٥} \stackrel{؟}{=} \frac{٢,٤}{٠,٦}$

٣,٦ = ٣,٦ ✓

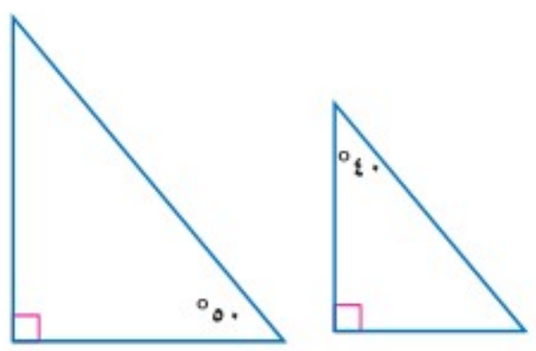
تحقق من فهمك

٤) **خرائط:** استعمل على خريطة المملكة مقياس رسم فيه كل ١ سم تمثِّل ٢٥٠ كلم، إذا كانت المسافة بين جدة والمدينة المنورة على الخريطة ١,٦٨ سم تقريبًا. فكم المسافة الحقيقية بينهما؟

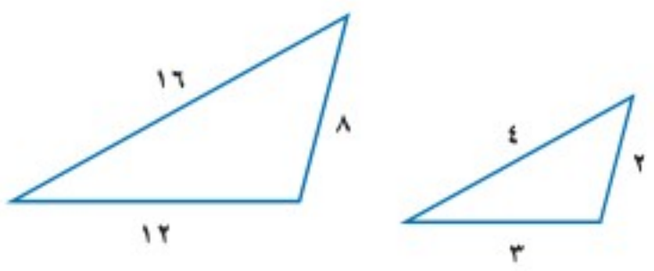
تأكد

المثالان ١ ، ٢ حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

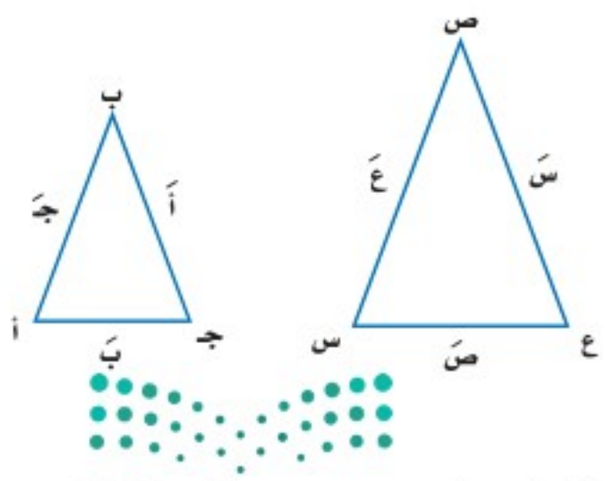
١)



٢)



مثال ٣ في الأسئلة ٣-٦، إذا كان △ أ ب جـ ~ △ س ص ع، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:



٣) أ = ٤، بَ = ٦، جـ = ٨، سَ = ٦

٤) سَ = ٩، صَ = ١٥، عَ = ٢١، جـ = ٧

٥) أ = ٢، بَ = ٥، سَ = ١٠، عَ = ٣٠

٦) بَ = ٦، جـ = ١٠، سَ = ٣٠، صَ = ١٥

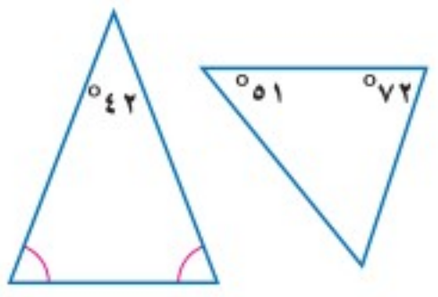
مثال ٤ ٧) **أشجار:** ترغب مريم في إيجاد ارتفاع شجرة في حديقتها، طول ظلها متران و٦٥ سنتمترًا. فإذا كان طول مريم متر و٥٠ سنتمترًا، وطول ظلها في تلك اللحظة ٧٥ سنتمترًا. فما ارتفاع الشجرة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

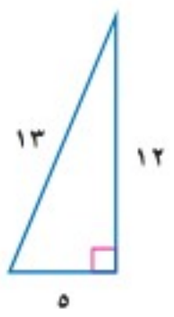
تدرب وحل المسائل

المثالان ١ ، ٢ حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

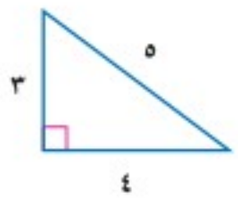
٨)



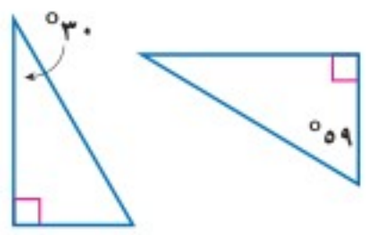
٩)



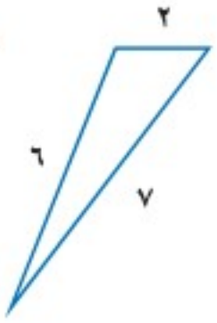
١٠)



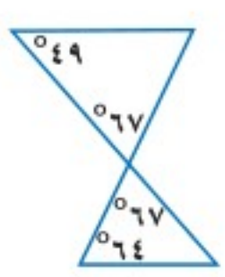
١١)



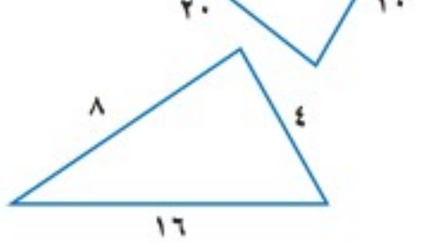
١٢)



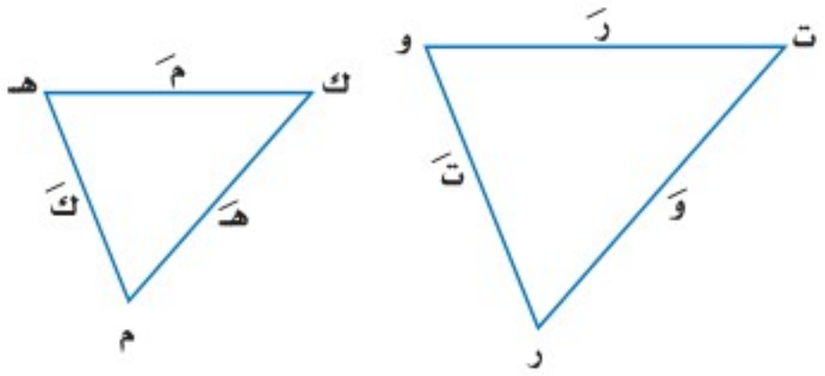
١٣)



١٤)



مثال ٣ في الأسئلة ١٤–١٨، إذا كان △ م ك هـ ~ △ ر ت و ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:



١٤) مَ = ٢، كَ = ٧، هـَ = ٦، رَ = ٤

١٥) رَ = ٥ , ٧، وَ = ١٥، تَ = ٢٠، هـَ = ٦

١٦) مَ = ٥ , ٣، كَ = ٩، تَ = ٥ , ١٣، وَ = ٩ , ٧٥

١٧) مَ = ٤ , ١، هـَ = ٨ , ٢، وَ = ٥٦ , ٠، تَ = ٨٤ , ٠

١٨) مَ = $\overline{٢٧}$، كَ = $\overline{٧٧}$، تَ = $\overline{١٤٧}$، وَ = $\overline{١٠٧}$

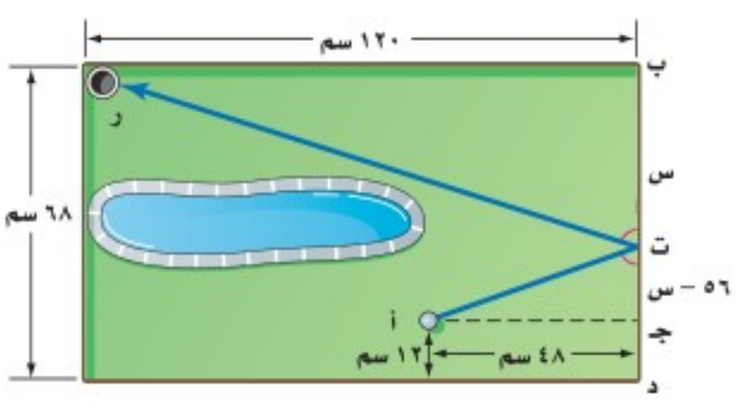
مثال ٤

١٩) **ألعاب:** يستعمل تصميم نموذج المركبات المقياس ١ سم: ٢٤ , ٠م من الطول الفعلي للمركبة. إذا كان للمركبة الأصلية نافذة على شكل مثلث قائم الزاوية. ارتفاعها ٧٦ , ٠م فكم سيكون ارتفاع النافذة على النموذج؟

الربط مع الحياة

حقّق لاعب ومدرب المنتخب السعودي للجولف علي بلحارث بطولة الكأس الوطنية لدولة الباكستان للجولف التي نُظِّمت في ربيع الثاني ١٤٣١ هـ في نادي ديراب للجولف في الرياض بمشاركة ١٠٠ لاعب.

٢٠) **جولف:** يلعب حمد لعبة جولف مصغرة كما في الشكل المجاور، ويريد قذف الكرة من النقطة أ إلى النقطة ت لترتد وتدخل الحفرة ر. استعمل تشابه المثلثات لتحديد بعد نقطة الارتداد عن الرأس ب.



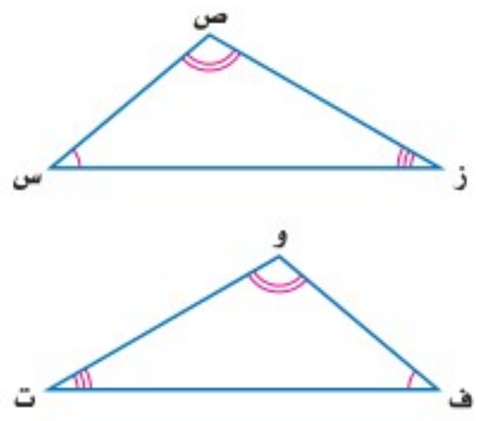
٢١) **خرائط:** يظهر مقياس رسم لخريطة المملكة أن ٥ , ٢ سم على الخريطة تمثّل ١٠٠ كيلومتر في الواقع. فإذا كانت المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة على الخريطة ٨سم، فما البعد الحقيقي بينهما؟

٢٢) **مشروع المدرسة:** خطّط معلم التاريخ لعمل نموذج للكعبة المشرفة على مقياس رسم: ٥ سم: ٦ , ٠م. فإذا كان الارتفاع الفعلي للكعبة المشرفة ١٤م، فكم سيكون ارتفاع النموذج؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٣) **اكتشف الخطأ:** قارنت رهف ونوال بين المثلثين المتشابهين المجاورين. فأيّهما كانت مقارنتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.



رهف

ق ∠ س = ق ∠ ت

ق ∠ ص = ق ∠ و

ق ∠ ز = ق ∠ ف

△ س ص ز ~ △ ت و ف

نوال

ق ∠ س = ق ∠ و

ق ∠ ص = ق ∠ ف

ق ∠ ز = ق ∠ ت

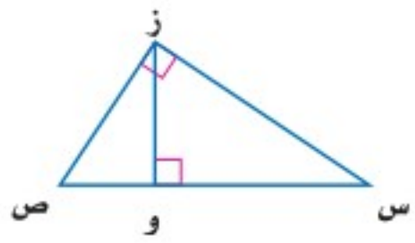
△ س ص ز ~ △ و ف ت

إرشادات حل المسألة

رسم مخطط

ارسم الشكل عندما يتطلب حل المسألة تبريرًا مكانيًّا أو شكلاً هندسيًّا. فمثلاً في السؤال ٢٤ ارسم كل مثلث وحده ليساعدك على الحل.

٢٤) **تحدٍّ:** المثلث س ص ز يشابه المثلثين المتشابهين المكوّنين من القطعة المستقيمة العمودية الواصلة بين ز والقطعة المستقيمة س ص. اكتب ثلاث عبارات تتعلق بهذين المثلثين، ولِمَ تتشابه؟



٢٥) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسّر إجابتك.

"إذا ضربت أطوال أضلاع مثلث في ٣، فإن زوايا المثلث بعد تكبيره لها نفس قياسات زوايا المثلث الأصلي".

٢٦) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا وسمِّه أ ب جـ، ثم ارسم المثلث المشابه له وسمّه و ك ر، على أن تكون مساحته ٤ أمثال مساحة أ ب جـ. واشرح استراتيجيتك.

٢٧) **اكتب:** لخِّص كيف تحدد أن المثلثين متشابهان؟ وكيف تجد القياسات المجهولة فيهما؟

تدريب على اختبار

٢٨) أوجد المسافة بين النقطتين (٢، −٤)، (−٥، ٨).

أ) $\sqrt{٣٣}$ جـ) $\sqrt{١٣٥}$

ب) $\sqrt{٦٥}$ د) $\sqrt{١٥٣}$

٢٩) أي المعادلات الآتية تمثِّل مستقيمًا مقطعه الصادي −٤، وميله ٦؟

أ) ص = ٦س − ٤ جـ) ص = −٦س + ٤

ب) ص = −٤س + ٦ د) ص = ٦س + ٤

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي: (الدرس ٩-٥)

٣٠) (٠، ٣)، (١، ٩)

٣١) (−٢، ٤)، (٥، ١٣)

٣٢) (١، −٥)، (−١، −٥)

حدّد ما إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا. (الدرس ٩-٤)

٣٣) ٣، ٤، ٥

٣٤) ٨، ١٠، ١٢

٣٥) ١٠، ٢٤، ٢٦

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب "أولية": (الدرس ٧-٦)

٣٦) ٤ك^{٢} − ١٠٠

٣٧) س^{٢} + ٦س − ٩

٣٨) ٩ت^{٣} + ٦٦ت^{٢} − ٤٨ت

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا كانت: أ = ٣ ، ب = −٢ ، جـ = ٦ ، فاحسب كلًّا ممَّا يأتي:

٣٩) $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

٤٠) $\frac{٢\text{أب}}{\text{جـ}}$

٤١) $\frac{\text{أجـ}}{-٤\text{ب}}$

٤٢) $\frac{-٣\text{أجـ}}{٢\text{ب}}$

٤٣) $\frac{-٢\text{ب جـ}}{\text{أ}}$

معمل الجبر

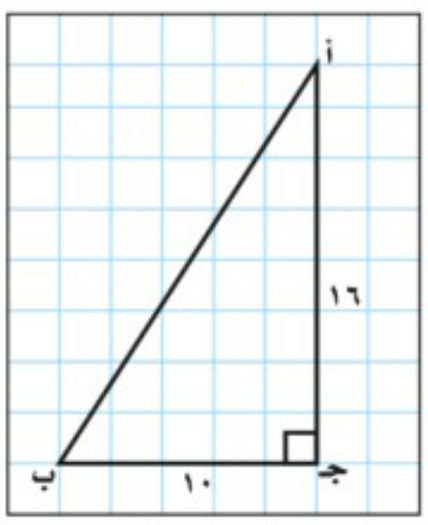
استقصاء النسب المثلثية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

يمكنك استعمال ورقة المربعات لاستقصاء نسب أطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية.

اجمع البيانات:



الخطوة ١: استعمل مسطرة وورقة مربعات لرسم عدة مثلثات قائمة الزاوية النسبة بين ضلعي القائمة لكل منها ٥ : ٨، سمِّ الرؤوس أ، ب ، جـ ، حيث جـ هي الزاوية القائمة والرأس ب يقابل الساق الأطول، والرأس أ يقابل الساق الأقصر.

الخطوة ٢: انسخ الجدول أدناه، وأكمل الأعمدة الثلاثة الأولى بإيجاد طول الوتر (الضلع أ ب) في كل مثلث قائم مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ٣: احسب النسب وسجّلها في العمودين الأوسطين مقربة إلى أقرب جزء من مئة.

الخطوة ٤: استعمل المنقلة لقياس الزاويتين أ، ب بدقة، مقربًا إلى أقرب درجة، ثم سجل قياسات الزوايا في الجدول.

أطوال الأضلاع			النسب		قياسات الزوايا		
الضلع ب جـ	الضلع أ جـ	الضلع أ ب	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$	الزاوية أ	الزاوية ب	الزاوية جـ
٢,٥	٤						٩٠°
٥	٨						٩٠°
١٠	١٦						٩٠°
							٩٠°
							٩٠°
							٩٠°

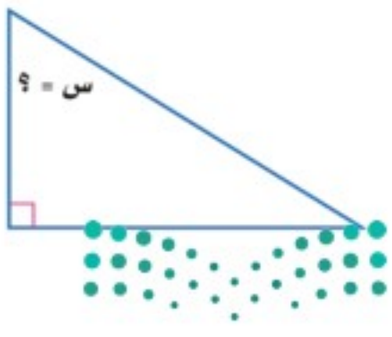
حلّل النتائج:

١) تفحّص قياسات الزوايا في الجدول والنسب بين أطوال الأضلاع. ماذا تلاحظ ؟ اكتب جملة أو جملتين لوصف أي نمط تراه.

خَمّن:

٢) ما النسبة بين طولي أقصر وأطول ضلع في مثلث قائم الزاوية ومشابه للمثلثات التي رسمتها هنا؟

٣) إذا كانت نسبة طول أقصر ضلع إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية هي ٥٣ , ٠ تقريبًا. فما قياس الزاوية الحادة الكبرى في المثلث القائم الزاوية؟



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

النسب المثلثية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس.

والآن

- أجد النسب المثلثية للزوايا.
- أستعمل النسب المثلثية لحل المثلث.

المفردات

حساب المثلثات
النسب المثلثية
الجيب
جيب التمام
الظل
حل المثلث
معكوس الجيب
معكوس جيب التمام
معكوس الظل

لماذا ؟

يعني معدّل انحدار طريق بنسبة ٢٥٪ أن الطريق ترتفع أو تنحدر ٢٥ قدمًا لكل ١٠٠ قدم أفقيًّا. ويمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد قياس زاوية ارتفاع الطريق أو انحدارها.

النسب المثلثية : **حساب المثلثات** هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. **والنسبة المثلثية** هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم. والنسب المثلثية الثلاث الأكثر شيوعًا هي **الجيب**، و**جيب التمام**، و**الظل** ، وهي موضحة في الجدول أدناه:

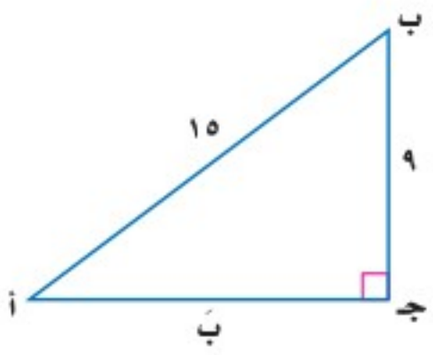
مفهوم أساسي — **النسب المثلثية**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	النموذج
جيب الزاوية أ = الضلع المقابل للزاوية أ / الوتر	جا أ = أَ / جـَ	
جيب تمام الزاوية أ = الضلع المجاور للزاوية أ / الوتر	جتا أ = بَ / جـَ	
ظل الزاوية أ = الضلع المقابل للزاوية أ / الضلع المجاور للزاوية أ	ظا أ = أَ / بَ	

مثال ١ — إيجاد نسب الجيب وجيب التمام، والظل

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.



الخطوة ١ : استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد أ جـ .

$أَ^٢ + بَ^٢ = جـَ^٢$ نظرية فيثاغورس

$٩^٢ + بَ^٢ = ١٥^٢$ أ = ٩ ، جـ = ١٥

$٨١ + بَ^٢ = ٢٢٥$ ربع

$بَ^٢ = ١٤٤$ اطرح ٨١ من كلا الطرفين

$بَ = ١٢$ أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الخطوة ٢ : استعمل أطوال الأضلاع لكتابة النسب المثلثية.

جا أ = المقابل / الوتر = ٩ / ١٥ = ٣ / ٥ جتا أ = المجاور / الوتر = ١٢ / ١٥ = ٤ / ٥ ظا أ = المقابل / المجاور = ٩ / ١٢ = ٣ / ٤

تحقق من فهمك

١) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٢ استعمال الحاسبة لإيجاد قيم العبارات

استعمل الحاسبة لإيجاد جتا ٤٢° إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

اضغط على المفاتيح:

on 1 New Document

1:Add Calculator trig cos 42 enter

قرّب إلى أقرب جزء من ألف.

جتا ٤٢° ≈ ٠,٧٤٣١.

تحقق من فهمك

٢أ) جا ٣١°. **٢ب)** ظا ٧٦° **٢جـ)** جتا ٥٥°

تنبيه !

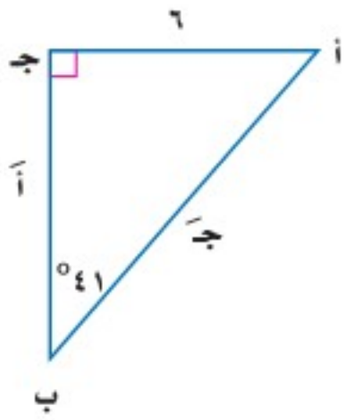
وضع الآلة الحاسبة (mode)

كن متأكدًا من وضع الآلة الحاسبة (mode) للعمل بالدرجات.

استعمل النسب المثلثية: عندما تجد القياسات المجهولة لأضلاع المثلث القائم وزواياه، فإنك تكون بذلك قد قمت **بحل المثلث**، ويمكنك إيجاد القياسات المجهولة إذا علمت طولي ضلعين في المثلث، أو طول ضلع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين.

مثال ٣ حل المثلث

حُلّ المثلث القائم الزاوية مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة ١: أوجد قياس ∠ أ. ١٨٠° − (٩٠° + ٤١°) = ٤٩°

قياس ∠ أ = ٤٩°.

الخطوة ٢: أوجد أَ. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الضلع المجاور للزاوية ب، فاستعمل نسبة الظل.

ظا ٤١° = $\frac{٦}{أَ}$ تعريف الظل

أَ ظا ٤١° = ٦ اضرب كلا الطرفين في أَ

أَ = $\frac{٦}{\text{ظا } ٤١°}$ = ٦,٩ تقريبًا اقسم الطرفين على ظا ٤١°، استعمل الحاسبة

لذا يكون أَ = ب جـ = ٦,٩ تقريبًا.

الخطوة ٣: أوجد جَـ. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الوتر، فاستعمل نسبة الجيب.

جا ٤١° = $\frac{٦}{جَـ}$ تعريف الجيب

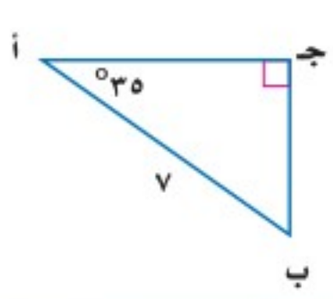
جَـ جا ٤١° = ٦ اضرب كلا الطرفين في جَـ

جَـ = $\frac{٦}{\text{جا } ٤١°}$ = ١,٩ تقريبًا اقسم الطرفين على جا ٤١°، استعمل الحاسبة

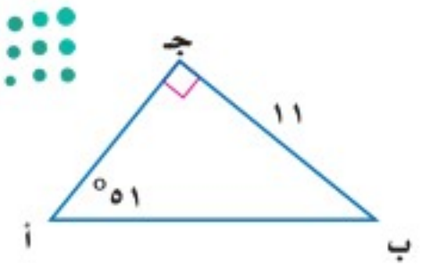
ولذا فإن جَـ = أ ب = ١,٩ تقريبًا.

تحقق من فهمك

٣أ)



٣ب)



إرشادات للدراسة

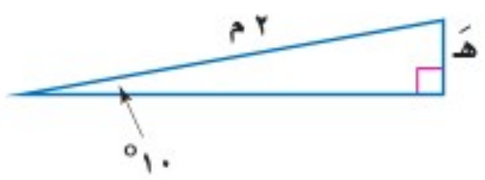
تذكّر رموز أطوال أضلاع المثلث

يُرمز إلى طول الضلع المقابل للرأس أ في المثلث أ ب جـ بالرمز أَ، وإلى طول الضلع المقابل للرأس ب بالرمز بَ، وإلى طول الضلع المقابل للرأس جـ بالرمز جَـ.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٤ من واقع الحياة — إيجاد طول الضلع المجهول

تمرين: يضع المدرِّب جهاز التمرين الرياضي مائلاً بمقدار ١٠°، فإذا كان طول سطح السير على الجهاز ٢ م، فكم يجب رفع نهايته عن الأرض بالسنتمترات تقريبًا؟



جا ١٠° = $\frac{\text{هَـ}}{٢}$ — تعريف الجيب

٢ × جا ١٠° = هَـ — اضرب كلا الطرفين في ٢

هَـ ≈ ٠,٣٥ — استعمل الحاسبة

فتكون قيمة هَـ بالأمتار تساوي ٠,٣٥، اضرب ٠,٣٥ في ١٠٠ لتحويل الأمتار إلى سنتمترات.

يرفع المدرب الجهاز ٣٥ سم تقريبًا.

تحقق من فهمك

٤) **لوح التزلج:** ما طول لوح تزلج يصنع مع سطح الأرض زاوية قياسها ٢٥°، ويرتفع طرفه ٢ م؟

الربط مع الحياة

للتمتع بصحة مثالية يجب على جميع الأشخاص من العمر ١٦ –٦٥، التدرب لمدة ٣٠ دقيقة على الأقل على نشاط متوسط الشدة لمدة خمسة أيام في الأسبوع.

يُعبر عن قاعدة الدالة المثلثية إذا علمت الجيب أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة، فيمكنك إيجاد قياسها باستعمال معكوس النسب المثلثية.

مفهوم أساسي — معكوس الدوال المثلثية

أضف إلى مطويتك

إذا كانت ∠ أ زاوية حادة، وكان:

التعبير اللفظي: جا أ = س فإن معكوس جيب س ورمزه جا$^{-١}$ س يساوي قياس ∠ أ.

الرموز: إذا كان جا أ = س، فإن جا$^{-١}$ س = ق ∠ أ.

التعبير اللفظي: جتا أ يساوي س، فإن معكوس جيب تمام س ورمزه جتا$^{-١}$ س يساوي قياس ∠ أ.

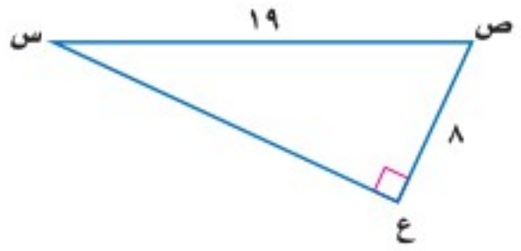
الرموز: إذا كان جتا أ = س، فإن جتا $^{-١}$ س = ق ∠ أ.

التعبير اللفظي: ظا أ يساوي س، فإن معكوس ظل س ورمزه ظا$^{-١}$ س يساوي قياس ∠ أ.

الرموز: إذا كان ظا أ = س، فإن ظا$^{-١}$ س = ق ∠ أ.

مثال ٥ — إيجاد قياس الزاوية المجهولة

أوجد ق ∠ ص إلى أقرب درجة.



تعلم طول الضلع المجاور للزاوية ص وقياس الوتر.

استعمل نسبة جيب التمام.

جتا ص = $\frac{٨}{١٩}$ — تعريف جيب التمام

استعمل الحاسبة البيانية ودالة جتا$^{-١}$ [$\cos^{-1}$] لإيجاد قياس الزاوية.

اضغط على المفاتيح: 65.098937 [enter] [)] 19 [÷] 8 [COS] [trig] لذا فإن ق ∠ ص = ٦٥°.

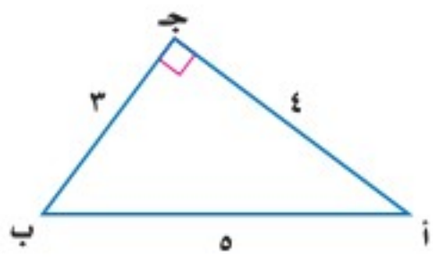
تحقق من فهمك

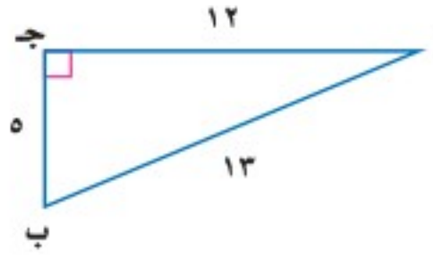
٥) أوجد ق ∠ س مقربًا إلى أقرب درجة إذا كان س ص = ١٤، ص ع = ٥ .

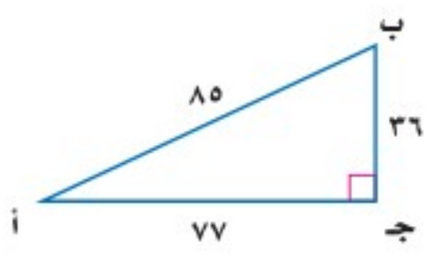
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

مثال ١ أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ في كل مما يأتي:

١) 

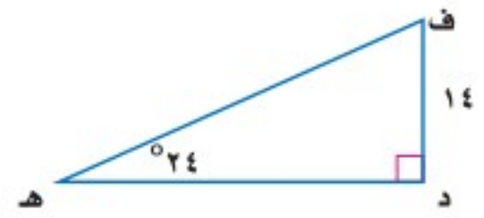
٢) 

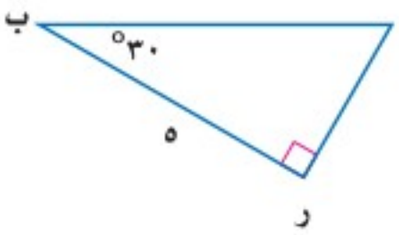
٣) 

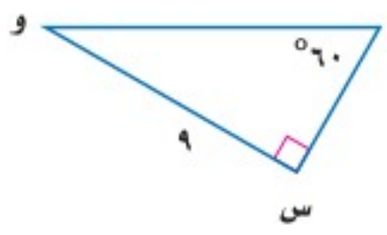
مثال ٢ استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف في كل مما يأتي:

٤) جا ٣٧° ٥) جتا ٢٣° ٦) ظا ١٤° ٧) جتا ٨٢°

مثال ٣ حُلّ كلّ مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرِّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:

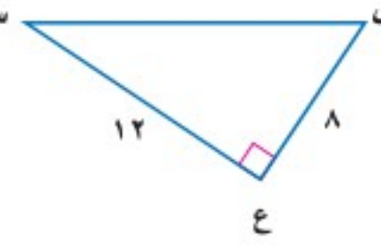
٨) 

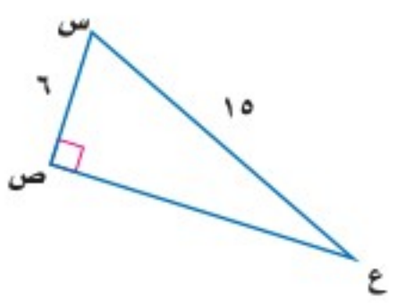
٩) 

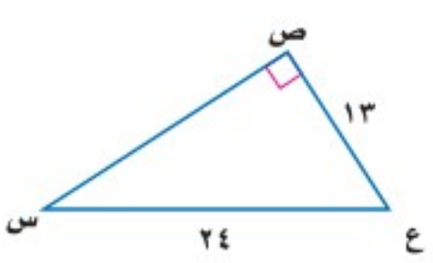
١٠) 

مثال ٤ ١١) **تزلج على الجليد:** في موقع للتزلج على أحد التلال، كان ارتفاع التلة الرأسي ١٠٠٠ م، وزاوية ميلها عن مستوى الأرض ١٨°، قدّر طول (ر).

مثال ٥ أوجد ق ∠ س لكل مثلث فيما يأتي مقربًا إلى أقرب درجة:

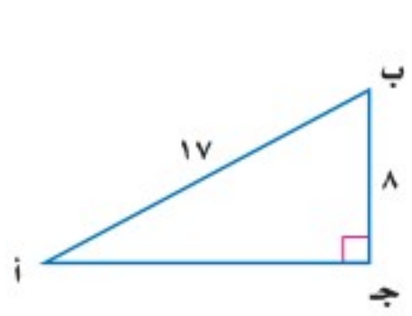
١٢) 

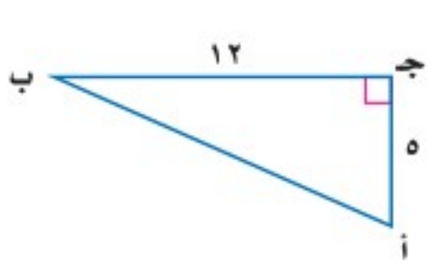
١٣) 

١٤) 

تدرب وحل المسائل

مثال ١ أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب في كلٍّ مما يأتي:

١٥) 

١٦) 

١٧)

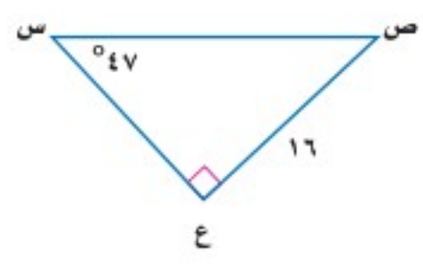
مثال ٢ استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

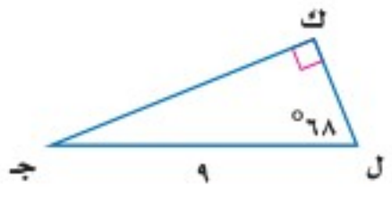
١٨) ظا ٢° ١٩) جا ٨٩° ٢٠) جتا ٤٤° ٢١) ظا ٤٥°

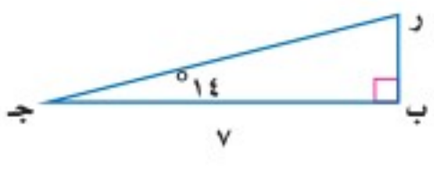
٢٢) جا ٧٣° ٢٣) جتا ٩٠° ٢٤) جا ٣٠° ٢٥) ظا ٦٠°

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٣ حُلّ كل مثلث قائم فيما يأتي مقرّبًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:

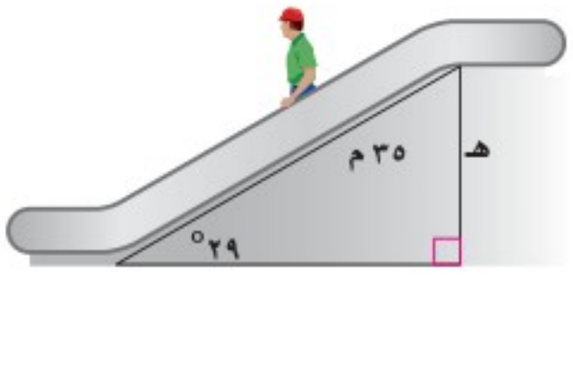
٢٦) 

٢٧) 

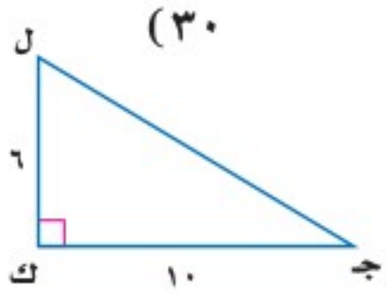
٢٨) 

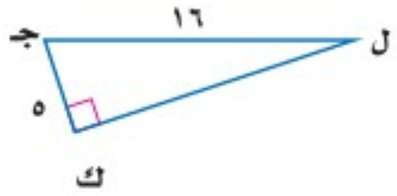
مثال ٤

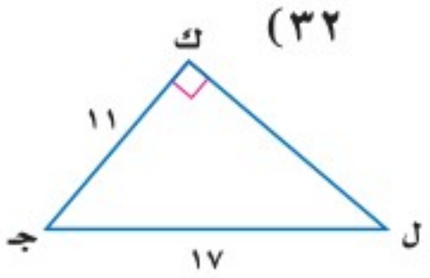
٢٩) **سلّم كهربائي:** يبلغ طول السلّم الكهربائي في أحد الأسواق الكبيرة ٣٥ مترًا، وقياس الزاوية التي يكوّنها مع الأرض ٢٩°، أوجد ارتفاع السلم.



مثال ٥ أوجد ق ∠ جـ لكل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرّبًا إلى أقرب درجة:

٣٠) 

٣١) 

٣٢) 

٣٣) **وقف الملك عبدالعزيز:** يصل ارتفاع أبراج وقف الملك عبد العزيز المطلة على المسجد الحرام إلى ٤٠٠ متر. ينظر عمار إلى أعلى الأبراج بزاوية ٥٥°. فما بُعد عمار عن قاعدة الأبراج؟

٣٤) **غابات:** يقدّر حارس غابة ارتفاع شجرة بنحو ٥٠ مترًا. فإذا كان الحارس يقف على بعد ٣٠ مترًا من قاعدة الشجرة، فما مقياس الزاوية التي يشكّلها مع قمة الشجرة؟

الربط مع الحياة

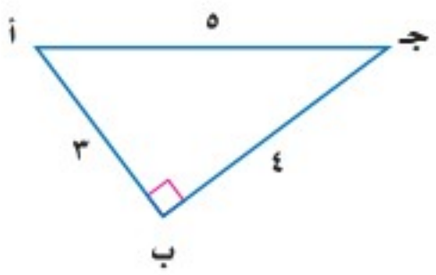
يبلغ طول أطول شجرة معمّرة نحو ١١٥ مترًا. وهناك نحو ١٣٥ شجرة من هذا النوع يزيد طولها على ١٠٧ أمتار.

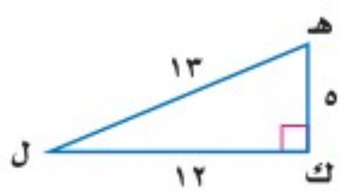
في السؤالين ٣٥-٣٦، افترض أن ∠ أ زاوية حادة في المثلث القائم أ ب جـ، ثم أوجد:

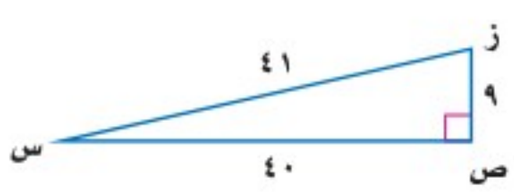
٣٥) جا أ، ظا أ إذا كان جتا أ = $\frac{٣}{٤}$.

٣٦) ظا أ، جتا أ إذا كان جا أ = $\frac{٢}{٧}$.

٣٧) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في هذه المسألة العلاقة بين دوال الجيب ودوال جيب التمام.







أ) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي وأكمله مستعملًا المثلثات أعلاه:

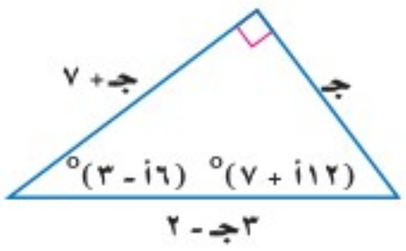
المثلث	النسب المثلثية		جا^{٢}	جتا^{٢}	جا^{٢} + جتا^{٢} =
أ ب جـ	جا أ =	جتا أ =	جا^{٢} أ =	جتا^{٢} أ =	
	جا جـ =	جتا جـ =	جا^{٢} جـ =	جتا^{٢} جـ =	
هـ ك ل	جا هـ =	جتا هـ =	جا^{٢} هـ =	جتا^{٢} هـ =	
	جا ل =	جتا ل =	جا^{٢} ل =	جتا^{٢} ل =	
س ص ز	جا س =	جتا س =	جا^{٢} س =	جتا^{٢} س =	
	جا ز =	جتا ز =	جا^{٢} ز =	جتا^{٢} ز =	

ب) **لفظيًّا:** خمّن علاقة مجموع مربعي دالتي الجيب وجيب التمام لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٣٨) **غوّاصات:** إذا نزلت غوّاصة مسافة ٣ أميال قطريًّا بزاوية مقدارها ١٠° مع قاع محيط، فكم يصبح بعدها عن سطح الماء؟

مسائل مهارات التفكير العليا



٣٩) تحدّ: حلّ المثلث في الشكل المجاور.

٤٠) تبرير: استعمل تعريف نسب الجيب وجيب التمام في تعريف نسبة الظل.

٤١) مسألة مفتوحة: اكتب مسألة تستعمل فيها نسبة جيب التمام لإيجاد قياس زاوية مجهولة في مثلث قائم الزاوية، ثم حلّها.

٤٢) تبرير: إذا كان جيب زاوية وجيب تمامها متساويين، فماذا تستنتج عن المثلث؟

٤٣) اكتب: وضّح كيف يمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في مثلث عُلِمَ فيه قياس زاوية حادة وطول أحد الأضلاع.

تدريب على اختبار

٤٤) أيّ المتباينات الآتية تعبّر عن التمثيل البياني أدناه؟

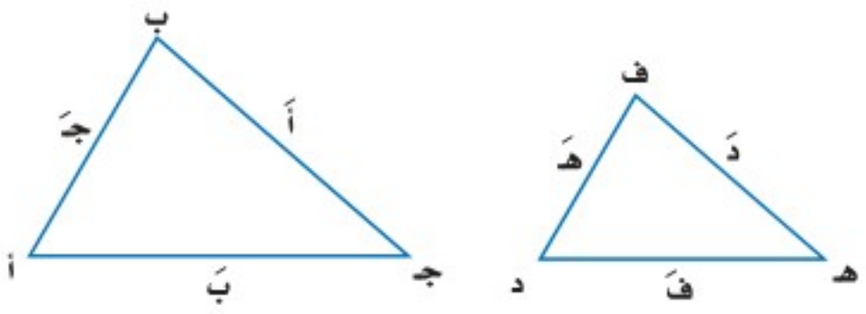
أ) $-٢ \geq س \geq ٤$ **جـ)** $س \leq ٤$ أو $س \geq -٢$

ب) $-٢ < س < ٤$ **د)** $س > ٤$ أو $س < -٢$

٤٥) إجابة قصيرة: يتقاضى مندوب مبيعات ٦٤٠٠٠ ريال راتبًا سنويًّا، إضافة إلى ٥٪ من قيمة مبيعاته. ما قيمة المبيعات التي عليه بيعها ليزيد دخلُهُ السنويُّ حتى ٩٠٠٠٠ ريالٍ؟

مراجعة تراكمية

في الأسئلة ٤٦-٤٨، إذا كان △ أ ب جـ ~ △ د ف هـ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة: (الدرس ٩-٦)



٤٦) أَ = ١٦، بَ = ١٢، جَـ = ٨، فَ = ٦

٤٧) دَ = ٩، فَ = ٦، هَـ = ٤، بَ = ١٨

٤٨) أَ = ٣٦، بَ = ٢١، هَـ = ١١، فَ = ١٤

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي: (الدرس ٩-٥)

٤٩) (٥، ٣)، (١١، ٩)

٥٠) (٨، ٢)، (٦، ٤)

٥١) (-١، ٧)، (١٣، -٣)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا اخترت عشوائيًّا كرةً من كيسٍ يحوي ٩ كراتٍ حمراء وَ ٦ كرات زرقاء وَ ٥ كرات صفراء، فأوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية:

٥٢) ح (زرقاء)

٥٣) ح (حمراء)

٥٤) ح (ليست صفراء)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

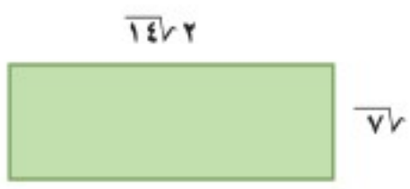
١) $٥\sqrt{٣٦}$

٢) $\frac{٣}{١-\sqrt{٢}}$

٣) $٢\sqrt{٣}+٧\sqrt{٣}$

٤) $٣\sqrt{٦}(٥\sqrt{٢})$

٥) **هندسة:** أوجد مساحة المستطيل.



أ) $١٤\sqrt{٢}$

ب) $٩٨\sqrt{٢}$

جـ) ١٤

د) $٧\sqrt{٢}$

حُلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

٦) $\sqrt{١٠س}=٢٠$

٧) $\sqrt{٤س-٣}=٦-س$

٨) **تغليف:** حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتمترًا مكعبًا. وتستعمل المعادلة نق$=\sqrt{\frac{ح}{ط ع}}$ لإيجاد نصف قطر العلبة، حيث (نق) نصف قطر الأسطوانة، (ع) ارتفاعها، (ح) حجمها. فإذا كان ارتفاع الأسطوانة ٨,٢٥ سنتمترات، فأوجد نصف قطرها.

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:

٩)

١٠)

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١١) (٢ ، ٣)، (٣، ٥)

١٢) (−٣، ٤)، (−٢، −٣)

١٣) (−١، −١)، (٣، ٢)

١٤) (−٤، −٦)، (−٧، ١)

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين فيما يأتي:

١٥) (٢، ٣)، (٣، ٥)

١٦) (−٣، ٤)، (−٢، −٣)

١٧) (−١، −١)، (٣، ٢)

١٨) (−٤، −٨)، (١٠، −٦)

١٩) **خدمة التوصيل:** يقدم أحد مطاعم الوجبات السريعة خدمة توصيل مجانية إلى أي موقع ضمن دائرة نصف قطرها ١٠كلم من المطعم. فقطع الشخص الذي سيوصل الوجبات ٣٢ شارعًا شمالًا، ثم ٤٥ شارعًا إلى الشرق لإيصال الطلب، علمًا بأن البعد بين كل شارعين في هذه المدينة هو $\frac{١}{٦}$ كلم.

أ) هل الموقع خارج نطاق الخدمة المجانية؟ فسّر ذلك.

ب) صف موقعين للتوصيل يكون البعد بينهما ١٠ كلم تقريبًا.

٢٠) إذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س صـ ع ، فأوجد أطوال الأضلاع المجهولة.

٢١) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.

٢٢) أوجد ق ∠ س مقرّبًا إلى أقرب درجة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

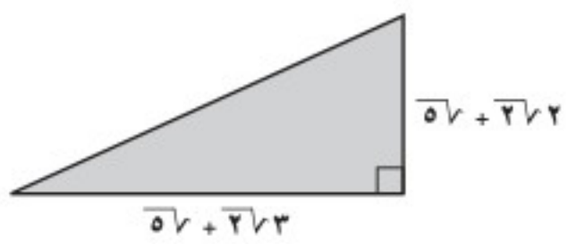
اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) بسّط $\frac{١}{٢\sqrt{٧} + ٤}$

أ) $\frac{٢\sqrt{٧} + ٤}{١٤}$ **جـ)** $\frac{٤ - ٢\sqrt{٧}}{١٤}$

ب) $\frac{٢ - ٢\sqrt{٧}}{٧}$ **د)** $\frac{٢ + ٢\sqrt{٧}}{٧}$

٢) ما مساحة المثلث أدناه؟



أ) $٣\sqrt{٢} + ١٠\sqrt{٥}$

ب) $١٧ + ٥\sqrt{١٠}$

جـ) $١٢\sqrt{٢} + ٨\sqrt{٥}$

د) $٨,٥ + ٢,٥\sqrt{١٠}$

٣) يحسب طول راسم المخروط (ل) المبيَّن بالشكل أدناه بالعلاقة ل = $\sqrt{ع^٢ + نق^٢}$ ، حيث نق نصف قطر القاعدة ، ع ارتفاع المخروط، استعمل هذه العلاقة لإيجاد نق في الشكل أدناه.

أ) ٤,٩ **جـ)** ٩,٨

ب) ٦,٣ **د)** ١٠,٢

٤) أيُّ الأطوال التالية لا تمثِّل أطوال أضلاع مثلثٍ قائم الزاوية؟

أ) (١٢ ، ١٦ ، ٢٤)

ب) (١٠ ، ٢٤ ، ٢٦)

جـ) (٢٤ ، ٤٥ ، ٥١)

د) (١٨ ، ٢٤ ، ٣٠)

٥) أيٌّ ممَّا يأتي لا يُعدُّ عاملًا من عوامل $س^٤ - ١٦$ ؟

أ) س − ٢

ب) س + ٢

جـ) $س^٢ + ٤$

د) س + ٤

٦) إذا كانت ن تقع في منتصف المسافة بين أ وَ ب ، حيث ن (١، ١) ، أ (٢، ٢)، فإن إحداثيات ب تكون:

أ) (٣، ٣)

ب) (١,٥ ، ١,٥)

جـ) (٠ ، ٠)

د) $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$

إرشادات للاختبارات

سؤال ٣ : عوّض بقيم ل ، ع في العلاقة، ثم أوجد قيمة نق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٧) ما عدد المرات التي تتقاطع فيها الدالة ص= س ^{٢} – ٤س + ١٠ مع محور السينات؟

٨) حلِّل كثيرة الحدود ٢س ^{٤} – ٣٢ تحليلًا تامًّا.

٩) بسِّط العبارة $\left(\frac{-٢ر^{-٢}هـ^{٥}ن^{٢}}{٥ر^{٥}هـ^{٢}ن^{-٣}}\right)^{-٢}$

١٠) استعمل خاصية التوزيع لتحليل

٣ س ص ^{٢} – ٦ س ^{٢} ص ع + ٣ س ص

١١) حلّل ثلاثية الحدود: ٢س ^{٢} + ٣س – ٩

إجابات مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل:

١٢) حدَّدت هدى مواقع بعض الأماكن في حيِّها في المستوى الإحداثي المبيَّن أدناه، حيث الوحدة = ٠,٥ ميل

أ) أوجد المسافة الحقيقية بين المدرسة والمسجد مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ إذا لزم.

ب) إذا وقع منزل هدى في منتصف المسافة بين المدرسة والمجمّع التجاري، فأوجد إحداثيات موقع منزل هدى موضِّحًا خطوات الحلِّ.

للمساعدة ..											
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	أ	١٢
فراجع الدرس ..	٦-١	٩-١	٩-٣	٩-٤	٧-٥	٩-٥	٨-٢	٧-٥	٦-٢	٧-٢	٧-٤ ٩-٥

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل ١٠
الإحصاء والاحتمال

فيما سبق

درست إيجاد قيم احتمالات لحوادث بسيطة.

والآن

- أصمّم دراسات مسحية وأقوّم نتائجها.
- أحلّ مسائل باستعمال التباديل والتوافيق.
- أجد احتمالات حوادث مركّبة.

لماذا ؟

قطار الحرمين: مشروع قطار الحرمين السريع هو أحد العناصر الهامة في برنامج توسعة شبكة الخطوط الحديدية في المملكة ويصل بين مكة المكرمة والمدينة المنورة، ومجهزاً بأنظمة إشارات واتصالات حديثة، ويقوم المهندسون بمراقبة حركة القطار والمحطات وتدوين ملاحظاتهم في استمارات خاصة لتحليلها باستعمال الطرق الإحصائية، بهدف الارتقاء بالخدمات المقدمة للحجاج والمعتمرين.

المفردات:

- العينة ص (١٨٦)
- الإحصاء الاستدلالي ص (١٩٨)
- الانحراف المعياري ص (١٩٩)
- التبديل ص (٢٠٦)
- التوافيق ص (٢٠٧)
- الحادثة المركبة ص (٢١٣)

المطويات منظم أفكار

الإحصاء والاحتمال: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الإحصاء والاحتمال، مبتدئًا بست أوراق A4 .

١ **اطو** كل ورقة من المنتصف. وقصَّ شريطًا طوليًّا بعرض ٢,٥ سم من الحافة اليمنى حتى خط الطي، ثم افصل الشريط عن خط الطي.

٢ **سمِّ** خمسة من هذه الأوراق بأرقام الدروس وعناوينها.

٣ **اكتب** على جزأي كل ورقة من الداخل: "تعريفات" و"أمثلة".

٤ **رتّب** الأوراق بعضها فوق بعض، وثبّتها من طرفها الأيمن، واكتب عنوان الفصل على الصفحة الأولى، واكتب ملاحظاتك على جزأي الورقة من الداخل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل ١٠

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

إذا اخترت عشوائيًّا مكعبًا واحدًا من كيس يحتوي ٦ مكعبات حمراء و ٤ صفراء و٣ زرقاء ومكعبًا واحدًا أخضر، فأوجد كلاًّ من الاحتمالات الآتية: (مهارة سابقة)

١) ح (أحمر)
٢) ح (أزرق)
٣) ح (ليس أحمر)
٤) ح (أبيض)

٥) إذا ألقى سعد مكعب أرقام مرة واحدة، فما احتمال ظهور الرقم ٥؟

٦) أدار محمود مؤشر قرص دوّار مقسّم إلى ٨ قطاعات متساوية، بألوان مختلفة أحدها باللون الأزرق.
ما احتمال أن يستقر المؤشر على القطاع الأزرق؟

أوجد ناتج الضرب واكتبه في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

٧) $\frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٤}$
٨) $\frac{٧}{٢٠} \times \frac{٤}{١٩}$
٩) $\frac{٧}{٣٢} \times \frac{٤}{٣٢}$
١٠) $\frac{٦}{١١} \times \frac{٥}{١٢}$
١١) $\frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{٥٦}{١٠٠}$
١٢) $\frac{١٧}{٢٧} \times \frac{٩}{٣٤}$

اكتب كل كسر من الكسور الآتية على صورة نسبة مئوية، مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة: (مهارة سابقة)

١٣) $\frac{١٤}{١٧}$
١٤) $\frac{٧}{٨}$
١٥) $\frac{١٠٧}{١٢٥}$
١٦) $\frac{٦٢٥}{١٠٢٤}$

١٧) **تسوّق:** زار ٢٠٠٠ متسوق مركزًا تجاريًّا، ٧٠٠ منهم دون سن ٢١. فما النسبة المئوية لمن هم دون سن ٢١ من بين المتسوقين؟

مراجعة سريعة

مثال ١

إذا اخترت عشوائيًّا مكعبًا واحدًا من كيس يحتوي ٦ مكعبات حمراء و ٤ صفراء ومكعبًا واحدًا أخضر، فما احتمال أن يكون أخضر اللون؟

يوجد في الكيس مكعب واحد أخضر من بين ١١ مكعبًا.

$$\frac{\text{عدد المكعبات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للمكعبات}} = \frac{١}{١١}$$

إذن، احتمال اختيار مكعب أخضر هو $\frac{١}{١١}$.

مثال ٢

أوجد ناتج ضرب $\frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٤}$ في أبسط صورة.

$\frac{٣ \times ٤}{٤ \times ٥} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}$ اضرب البسطين، اضرب المقامين

$= \frac{١٢}{٢٠}$ بسّط

$= \frac{٣}{٥}$ اكتب الكسر في أبسط صورة

مثال ٣

اكتب الكسر $\frac{٣٣}{٨٠}$ على صورة نسبة مئوية، وقرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

$\frac{٣٣}{٨٠} \approx ٠,٤١٣$ بسّط وقرّب

$٠,٤١٣ \times ١٠٠ = ٤١,٣$ اضرب الكسر العشري في ١٠٠

إذن، $\frac{٣٣}{٨٠} \approx ٤١,٣٪$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

١-١٠

تصميم دراسة مسحية

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست تنظيم البيانات باستعمال الجداول التكرارية.

والآن

- أصمّم دراسة مسحية.
- أتعرّف الطرق المختلفة لاختيار العينة.

المفردات

العينة

المجتمع

الدراسة المسحية

الدراسة القائمة على الملاحظة

التجربة

العينة المتحيزة

العينة العشوائية

العينة العشوائية البسيطة

العينة العشوائية الطبقية

العينة العشوائية المنتظمة

لماذا ؟

عند صناعة الملابس الرياضية يجب التحقق من عدة أمور لضمان الجودة؛ مثل: فحص نوع القماش، ومدى مناسبته للرياضة المعنيّة، والألوان، والأعمال الفنية المطبوعة عليه وغيرها. وستكون التكلفة عالية جدًّا إذا فُحص كل زيّ يتم إنتاجه في المصنع؛ لذا فإنه يتم فحص عدد محدود من تلك الملابس بدلًا من ذلك.

وجميع الملابس الرياضية المنتجة تشكّل المجتمع، بينما تشكّل الملابس الرياضية التي يتم فحصها عينة من هذا المجتمع. ويتوصل الفاحصون إلى استنتاجات حول العينة ويعمّمونها على المجتمع كله.

تصميم الدراسة المسحية: تُعدّ **العينة** جزءًا من مجموعة أكبر تُسمى **المجتمع**. وحيث إن فحص كل عنصر في المجتمع أمر غير عملي، يتم اختيار عينة لتمثل هذا المجتمع. وبعد تحليل النتائج الخاصة بالعينة يمكن التوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملًا. وكلما كان حجم العينة أكبر أو استعملت عينات أكثر كانت النتائج أكثر تمثيلاً للمجتمع.

وللتوصل إلى استنتاجات صحيحة من البيانات التي تجمع من العينة، تحتاج أن تحدد أولاً أفضل أسلوب لجمع البيانات.

مفهوم أساسي — أساليب جمع البيانات

أضف إلى مطويتك

الأسلوب	التعريف/ الاستعمال	مثال
الدراسة المسحية	• تؤخذ البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع. • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول المجتمع.	لتحديد درجة رضا طلاب مدرسة عن فقرات الإذاعة المدرسية الصباحية يسأل مشرف الإذاعة عينة من ٥٠ طالبًا عن رأيهم في فقرات الإذاعة.
الدراسة القائمة على الملاحظة	• تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة. • لمقارنة ردود الأفعال والتوصل إلى استنتاجات حول استجابات المجتمع.	تراقب شركة لصناعة الدمى بعض الأطفال وهم يلعبون، وتلاحظ نوع الدمى التي يفضلونها أكثر. ويستنتجون من ذلك أن الأطفال في عمر السنتين يفضلون الدمى التي تصدر أصواتًا على تلك التي لا تصدر أصواتًا.
التجربة	• تُسجّل البيانات بعد تغيير العينة. • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثةٍ ما.	يقوم مراقب ضبط الجودة بتشغيل آلة بسرعة معينة عشر مرات، فإذا وجد أن المنتج يكون معيبًا في كل مرة فإنه يستنتج أن المنتج سيكون معيبًا في كل مرة تدور فيها الآلة بهذه السرعة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إرشادات للدراسة

إحصاء السكان

إحصاء السكان هو مسح لجميع أفراد المجتمع. لذا لا تستعمل الإحصاءات السكانية أسلوب العينة، وقد أجري آخر إحصاء في المملكة عام ٢٠١٧م.

مثال ١ تصنيف أساليب جمع البيانات

تبرّع: ترغب جمعية خيرية في معرفة مدى رغبة الناس في تقديم التبرعات للجمعيات الخيرية. فوزّعت ١٠٠٠ استبانة على سكان أحد الأحياء.

أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

العينة: الأشخاص الذين تسلموا الاستبانات، وعددهم ١٠٠٠ شخص.

أمّا المجتمع: فجميع سكان ذلك الحي.

ب) صنّف أسلوب جمع البيانات الذي استعملته هذه الجمعية.

هذا هو أسلوب الدراسة المسحية، حيث تؤخذ البيانات من استجابات أفراد العينة نحو الاستبانة.

تحقق من فهمك

حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل في كلٍّ مما يلي:

١أ) بحوث: قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتحليل ردود أفعال مجموعتين من الفئران تجاه السكر.

المجموعة ١
طعام فيه سكر

المجموعة ٢
طعام بلا سكر

١ب) إعادة التدوير: يرغب مجلس بلدي في أن يبدأ بمشروع إعادة تدوير، فأرسل لمجموعة من السكان اختيروا عشوائيًّا ١٠٠٠ استبانة تضمنت سؤالاً حول المواد التي يرغبون في إعادة تدويرها.

هناك عوامل تؤثر في جمع البيانات والاستنتاجات التي يتم التوصل إليها. فإذا كانت طريقة اختيار العينة تعطي تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى فإن العينة تكون **عينة متحيزة**، والبيانات المأخوذة منها متحيزة، وتكون العينة غير متحيزة إذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار، وتُسمى **عينة عشوائية**.

مثال ٢ تحديد تحيز العينة

حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

أ) فضائيات: سُئل كل خامس شخص يدخل إلى متجر عن القناة الفضائية التي يفضلها.

غير متحيزة؛ لأن هذه العينة تتكون من أشخاص اختيروا عشوائيًّا.

ب) هوايات: سئل كل خامس شخص يدخل مكتبة عن هوايته المفضلة.

متحيزة؛ لأن الهواية الأكثر تفضيلاً للأشخاص الموجودين في المكتبة هي المطالعة.

تحقق من فهمك

٢أ) مدرسة: سُئل كل عاشر طالب يدخل المدرسة عن المادة الدراسية المفضلة لديه.

٢ب) مطاعم: يريد مدير مطعم أن يتحقق من أن العاملين يخدمون الزبائن بأسلوب جيد، فراقب أحد العاملين مدة ساعة في اليوم.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

أساليب المعاينة: تُستعمل بيانات العينة لتقدير إحدى سمات المجتمع كاملًا. وتُختار العينة العشوائية من المجتمع على أن تكون ممثلة له دون إعطاء أفضلية لفئة معينة على أخرى. ويعرض الجدول الآتي ثلاثة أنواع من العينات العشوائية:

مفهوم أساسي — العينات العشوائية

أضف إلى مطويتك

النوع	التعريف	مثال
العينة العشوائية البسيطة	العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأي عينة أخرى من المجتمع.	سحب أرقام مئة طالب من كيس، وإخضاع هؤلاء الطلاب لدراسة مسحية.
العينة العشوائية الطبقية	يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة، ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات.	يختار الباحث عينات من صفوف مختلفة من الطلاب بناءً على النسبة المئوية لهذه الصفوف في المدرسة؛ ليعكس التنوع في صفوف المدرسة.
العينة العشوائية المنتظمة	العينة التي يُختار أفرادها تبعًا لفترةٍ زمنيةٍ محددةٍ، أو فئةٍ محددةٍ من العناصر.	تُفحص قطعة من خط إنتاج كل عشر دقائق، أو تُفحص قطعة من كل ٥٠ قطعة.

مثال ٣ — تصنيف العينات العشوائية

حديقة الحيوانات: وزّعت الحيوانات في إحدى الحدائق إلى مجموعات تبعًا لموطنها، ثم اختير زوج من كل مجموعة بصورة عشوائية لفحص دمه.

أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

تتكون العينة من أزواج الحيوانات التي تم اختيارها من كل مجموعة. والمجتمع هو جميع الحيوانات الموجودة في الحديقة.

ب) صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك.

هذه العينة طبقية؛ حيث قُسّمت الحيوانات إلى فئات قبل الاختيار العشوائي.

الربط مع الحياة

افتتح مستشفى الدمام المركزي عام ١٣٨٣هـ بسعة ٥٠ سريرًا، واستمر في التطور وزيادة الأقسام والعيادات حتى أصبح مجمعًا طبيًّا متكاملًا باسم مجمع الدمام الطبي، يقدم خدماته إلى سكان مدينة الدمام والمنطقة الشرقية من المملكة.

تحقق من فهمك

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك:

٣أ) مستشفى: اعتمادًا على المعلومات المبينة إلى اليمين، وفي ندوة تعريفية، يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائيًّا ليقدم نبذة عن الخدمات التي يوفرها المستشفى في قسمه.

٣ب) طعام: يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ دقيقة بدءًا بوقتٍ يُحدّد عشوائيًّا.

٣جـ) احتفالات: تلصق نجمة في أحد الاحتفالات أسفل ثلاثة أطباق، وتقدم هدايا للضيوف الذين تكون هذه الأطباق من نصيبهم.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تأكد

مثال ١ **حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل:**

١) **مجلات:** يريد القائمون على إعداد مجلة المدرسة اختيار تصميم لغلافها من بين خمسة تصاميم؛ لذا فقد اختير عشرة من طلاب المدرسة عشوائيًّا للانتقاء من بين هذه التصاميم.

٢) **رياضة:** يريد مدير نادٍ رياضي أن يحدّد شعارًا للنادي، فسأل ١٠٠ شخص من مشجعي النادي اختيروا عشوائيًّا عن آرائهم.

مثال ٢ **حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسِّر إجابتك:**

٣) **هوايات:** يقف عدد من الطلاب عند مدخل المدرسة ويسألون كل عاشر طالب يدخلها عن هوايته المفضلة.

٤) **تسوق:** سُئل كل خامس عشر متسوِّق في متجر ملابس عن نوع الهدية التي يودّ أن تُقدم له.

مثال ٣ **حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، مفسِّرًا إجابتك:**

٥) **بطاقات مصوّرة:** وزّع أحمد بطاقات الصور التي التقطها في مجموعات بحسب المدن التي تمثّلها هذه البطاقات، ثم اختار بطاقتين عشوائيًّا من كل مجموعة.

٦) **تلفزة:** تود محطة تلفزة أن تحدد أكثر برامجها مشاهدة، فأرسلت استبانةً إلى عدة أشخاص اختيروا عشوائيًّا من أنحاء المملكة كافة.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ **عيّن فيما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل:**

٧) **صحف:** يريد محل بيع صحف أن يعرف عدد النسخ التي يطلبها من كل صحيفة يومية، فأرسل رسائل إلى جميع بيوت أحد الأحياء يسألهم فيها عن الصحيفة التي يطالعونها.

٨) **رحلات:** سألت وكالة سياحية جميع زبائنها الذين تعاملوا معها خلال السنتين الماضيتين عن الأماكن الأكثر تفضيلاً والأقل تفضيلاً.

مثال ٢ **حدّد في كل مما يأتي إن كانت كل العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسِّر إجابتك:**

٩) **مكتبة:** سأل أمين مكتبة كل من يستعير كتابًا إن كان يستعمل الحاسب الموجود في المكتبة.

١٠) **ملابس:** يُعطي محل بيع ملابس كل زبونٍ بطاقة يمكنه أن يعيدها بالبريد، يسأله فيها عن نوع الثياب التي يفضِّلها.

مثال ٣ **حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك:**

١١) **توظيف:** صنّفت شركة طلبات التوظيف لديها في مجموعات بحسب مناطق سكن مقدميها، ليتم فرزها لاختيار طلبات الشباب.

١٢) **تسوق:** يقدم مركز تجاري هدية للزبون رقم ٥٠ من بين كل خمسين زبونًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

١٣) **حقائب:** أجرت شركة لصناعة الحقائب دراسة على زبائنها حول تصميم الحقيبة، وذلك عن طريق تسجيل شكل ولون الحقيبة التي يشتريها الزبون.

أ) حدّد العينة، والمجتمع الذي اختيرت منه.

ب) صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل.

جـ) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

د) إذا كانت غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة.

الربط مع الحياة

حمل الحقيبة المدرسية بطريقة صحيحة يجعل الظهر مشدودًا، ولا يسبب تقوّس العمود الفقري، بشرط توزيع ثقلها على الكتفين، ووجود مسند مناسب له على الظهر، وعدم تحميلها بأشياء كثيرة وغير ضرورية، وألّا تتعدّى كتلتها الإجمالية ١٠ ٪ من كتلة الطالب.

١٤) **تمثيلات متعددة:** سوف تقوم في هذه المسألة بتصميم وتنفيذ دراسة مسحية خاصة بك.

أ) كتابيًا: اكتب سؤالاً ذا معنى تريد إجابته من خلال دراسة مسحية، ، ثم صف الطريقة التي ستستعملها في جمع البيانات، واشرح سبب اختيارك إياها.

ب) تحليليًا: صمم طريقة لتنفيذ دراستك باستعمال عينة غير متحيزة. فسِّر سبب اختيارك للعينة.

جـ) تطبيقيًا: نفّذ دراستك.

د) جدوليًا: سجِّل نتائج الدراسة في جدول.

هـ) بيانيًا: استعمل التمثيل البياني (بالخطوط، أو بالقطاعات الدائرية، أو بالمدرج التكراري)، أو أي طريقة بصرية أو بيانية؛ لعرض نتائج الدراسة على طلاب الصف.

مسائل مهارات التفكير العليا

١٥) **تبرير:** قارن بين أوجه شبه وأوجه اختلاف أساليب جمع البيانات الثلاثة التي عَرضها الدرس.

١٦) **مسألة مفتوحة:** صف مثالاً من واقع الحياة لدراسة قائمة على الملاحظة.

١٧) **اكتب:** فسّر أهمية الدراسات المسحية المضبوطة للشركات، وكيف يمكن للشركات استعمالها.

تدريب على اختبار

١٨) **إجابة قصيرة:** تزيد فترة الاحتراق الأولى لصاروخ مقدار ٢٨ ثانية على الفترة الثانية. فإذا كانت مدة الاحتراق كاملة ١٥٢ ثانية فكم ثانية مدة الفترة الأولى؟

١٩) **هندسة:** ثُني سلك طوله ٤٢ سنتمترًا ليكون مستطيلاً طوله يساوي مِثْلَي عرضه. أوجد بُعدي المستطيل.

أ) ٥ سم، ١٢ سم

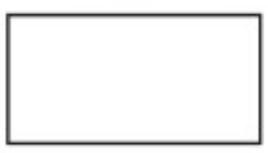
ب) ٧سم، ١٤سم

جـ) ٩سم، ١٦سم

د) ١١سم، ١٨سم

مراجعة تراكمية

٢٠) **هندسة:** إذا كانت مساحة المستطيل المجاور ٦س^{٢} + ١٩س − ٧ وحدة مربعة، فما عرضه؟ (الدرس ٢ - ٢)



٣س - ١

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

٢١) **علوم طبيعية:** في تجربة إلقاء جسم من ارتفاع ٥م ، قام الطلاب بتسجيل ارتفاع الجسم عن الأرض، والزمن الذي استغرقه، فكانت كالآتي: (الدرس ٢ - ١)

الزمن (ثانية)	٠	٠,٢	٠,٤	٠,٦	٠,٨	١
الارتفاع (سم)	٥٠٠	٤٨٠	٤٢٢	٣٢٤	١٨٦	١٠

مثّل العلاقة بين ارتفاع الجسم والزمن بيانيًّا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٢-١٠

تحليل نتائج الدراسة المسحية

فيما سبق

درست تصميم الدراسات المسحية.

والآن

- ألخص نتائج الدراسة المسحية.
- أقوّم نتائج الدراسة المسحية.

المفردات

مقاييس النزعة المركزية

البيانات الكمية

البيانات النوعية

لماذا ؟

ترغب الشركات عادة في استعمال الدراسات المسحية للحصول على تغذية راجعة حول أدائها في مجالات عملها بدءًا من المبيعات وانتهاءً بمواقعها الإلكترونية. وقد حصلت شركة على النتائج المبينة في الشكل المجاور في استطلاع حول موقعها الإلكتروني. ماذا تعني هذه القيم؟ وما الطريقة التي جمعت بها هذه البيانات؟ وهل تمثل العينة زبائن الشركة بدقة؟

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

تلخيص نتائج الدراسة المسحية: بعد جمع البيانات من الدراسة المسحية، فإنها تحتاج إلى تلخيصها كي تكون ذات معنى. ويمكن تلخيص بيانات الدراسات المسحية باستعمال مقاييس النزعة المركزية.

ملخص المفهوم

مقاييس النزعة المركزية

أضف إلى مطويتك

النوع	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسومًا على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.	عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

بعض البيانات لا يمكن تحليلها باستعمال الطرق الإحصائية، لكن **البيانات الكمية** التي تُعطى بصورة قيم عددية يمكن تحليلها. مثّل درجات الاختبارات أو ساعات الدراسة، أو كتل الأجسام، بينما **البيانات النوعية** لا يمكن أن تأخذ قيمة عددية، ومن أمثلتها: الجنس أو الجنسية أو البرنامج التلفزيوني المفضل. ويمكن أحيانًا أن تكون البيانات كمية ولا نستطيع أن نجد مقاييس النزعة المركزية، ويحدث هذا عندما تمثل البيانات أشياء مختلفة؛ أي لا تكون الأعداد أو النسب للشيء نفسه.

مثال ١ اختيار طريقة تلخيص البيانات

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

الخضراوات	السعرات	الخضراوات	السعرات
بصل أخضر	١٤	قرنبيط	١٠
فاصولياء	٣٠	خيار	١٧
فلفل	٢٠	ذرة	٦٦
باذنجان	٢٥	خس	٩
ملفوف	١٧	سبانخ	٩
جزر	١٨	كوسا	١٧

أ) تغذية: **يبيِّن الجدول المجاور السعرات الحرارية في الطبق لكل نوع من الخضراوات.**

رتّب هذه القيم تصاعديًّا: ٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٨، ٣٠، ٦٦.

تلاحظ وجود قيمة أكبر كثيرًا من سائر القيم وهي ٦٦، ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات. وهناك مجموعتان فقط من الأعداد المتماثلة؛ لذا فالوسيط هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات.

{٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٨، ٣٠، ٦٦}

الوسيط ١٧ سُعرًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

ب) **عمرة:** أجرت وكالة سفريات دراسة مسحية على ١٠٠٠ شخص حول الزمن الذي مضى على آخر عُمْرَة لكل منهم والنتائج يوضحها الجدول المجاور.

الاستجابة	النسبة المئوية
٣ سنوات على الأقل	٨
سنة إلى أقل من ٣ سنوات	١٥
٦ شهور إلى أقل من سنة	٤٥
أقل من ٦ شهور	٣٢

لا يمكن حساب مقياس نزعة مركزية لهذه المجموعة من البيانات؛ لأن كل نسبة مئوية في الجدول تمثل شيئًا مختلفًا.

فعلى سبيل المثال، أجاب ١٥٪ من الأشخاص بأنه قد مضى من سنة إلى أقل من ٣ سنوات على أدائهم العمرة، بينما ذكر ٣٢٪ منهم أنهم أدّوا آخر عمرة قبل أقل من ٦ شهور. فالوسيط لهذه البيانات وهو ٢٣,٥٪ ليس له أي معنى في هذه الحال.

تحقق من فهمك

أ١) **تسوُّق:** سجَّل أحد محال بيع الأجهزة الإلكترونية عدد الزبائن في كل ساعة عمل في أحد الأيام كما هو موضح في الجدول المجاور.

عدد الزبائن			
٨٦	٧٩	٧١	٨٦
٨٦	٨٨	٣٢	٧٩
٧٠	٧١	٦٩	٨٢
٨٦	٨٥	٨١	٨٦

ب١) **كتب:** في دراسة مسحية لمصادر أبحاث عدد من طلاب الصف الثالث المتوسط في إحدى المناطق التعليمية كانت الاستجابات على النحو الآتي: من المعلم: ٤٢٠؛ من مكتبة المدرسة: ١٣٢٠؛ من المكتبة العامة: ١٠٢٠؛ من متاجر الكتب: ١٠٢٠؛ من المكتبة المنزلية: ٧٢٠؛ من الإنترنت: ٥٤٠؛ من الأصدقاء: ٥٤٠ .

تقويم نتائج الدراسات المسحية: بعد تنفيذ الدراسة المسحية يتم تلخيص البيانات، ويُعد تقرير حول نتائج الدراسة واستنتاجاتها. ومع ذلك فقد يؤدي التحيز أحيانًا إلى أخطاء في البيانات فضلاً عن أخطاء في طريقة تفسيرها وفي التقرير المكتوب عنها؛ لذا يجب أن تكون قادرًا على الحكم على مصداقية هذه التقارير من خلال التحقق من أن العينة عشوائية وكبيرة وممثِّلة للمجتمع تمثيلًا جيدًا، وأن مصدر البيانات موثوق به.

وغالبًا ما تقدم الصحف اليوميّة والمجلات والتقارير المتلفزة نتائج دراسات مسحيّة، تحتاج إلى الحكم على مصداقيتها قبل اتخاذ قرار يعتمد عليها، ويمكن أن تطرح بعض الأسئلة على نفسك من أجل ذلك مثل:

- ما مجتمع الدراسة؟ وما العينات المختارة منه؟ وهل أستطيع تحديدها بسهولة؟ وهل هي متحيزة؟
- ما مصدر البيانات؟ وهل هو موثوق به؟ وهل يمكن أن يكون متحيزًا؟
- هل تدعم البيانات الاستنتاجات فعليًّا؟

تنبيه!

النسبة المئوية

تحقق دائمًا من أن الدراسة المسحية التي تعطي بياناتها على صورة نسب مئوية تدل على حجم العينة.

مثال ٢ تقويم دراسة مسحية

كتاب الجامعة السنوي: إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية، فحدّد صحة المعلومات والاستنتاجات.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
إلكترونيًّا فقط	٦٧٪
ورقيًّا فقط	٢٢٪
إلكترونيًّا وورقيًّا	٩٪
لا تفضيل	٢٪

السؤال: هل يجب أن تعدّ الجامعة كتابها السنوي إلكترونيًّا هذا العام؟

العينة: وضعت استبانات على مقاعد الطلاب بصورة عشوائية.

الاستنتاج: يجب أن تعدّ الجامعة هذا العام الكتاب السنوي إلكترونيًّا فقط.

ذكر التقرير أن اختيار الطلاب كان عشوائيًّا، ولم يذكر عددهم، كما أن النتائج أُعطيت بنسب مئوية؛ فالنسبة ٦٧٪ قد تعني ٣٤ من ٥٠، وهذه ليست عينة كافية لتمثل جامعة كبيرة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك

٢) **مدينة ألعاب:** إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية حيث طلب من كل عاشر زائر من بين ٥٠٠٠ زائرٍ لمدينة ألعاب في أحد الأيام أن يجيب عن سؤال الاستبانة الآتي:

السؤال: هل ترى أن أسعار بطاقات الدخول لمدينة الألعاب معقولة؟

الاستنتاج: أسعار التذاكر معقولة، ويجب أن تبقى كما هي.

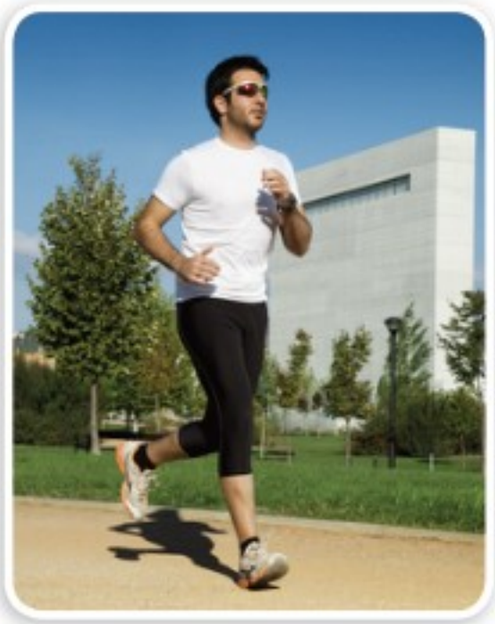
النتائج	
الاختيار	الاستجابة
معقولة جدًّا	٥٦
معقولة	١٨٥
معقولة نوعًا ما	١٣٢
غير معقولة	٦٩
غيرمعقولة أبدًا	٥٨

يمكن أن تؤثر طريقة عرض نتائج الدراسة المسحية في طريقة تفسير نتائجها. وهذه بعض العوامل المؤثرة:

- إذا كانت أطوال فترات التدريج في التمثيل البياني بالخطوط أو بالأعمدة أو بالمدرّجات التكرارية كبيرة، فإن التغيرات تبدو بسيطة على الرغم من أنها قد تكون حقيقة مهمة. أما إذا كانت أطوال الفترات قصيرة، فإنها ستضخم التغيرات الطفيفة في التمثيل البياني.

وهذه بعض خصائص تمثيل النتائج التي يمكن أن تؤثر في الاستنتاج:

- يجب أن تكون أطوال فترات التدريج في التمثيل البياني ثابتة.
- قد يعطي استعمال النسب المئوية بدلاً من القيم الفعلية لمجموعة البيانات نتيجة مضلّلة، ومع هذا يُفضل استعمال النسب المئوية إذا كان حجم العينة كبيرًا.
- يجب أن يكون لكل الأعمدة في التمثيل بالأعمدة أو المدرج التكراري العرض نفسه؛ فقد يؤدي تغيير عرض الأعمدة إلى تضخيم الاختلافات.
- عند تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية أو بالأعمدة أو بالمدرج التكراري بدرجات لون واحد مختلفة قد تختلط المجموعات بصريًّا وتؤثر في طريقة تفسير النتائج.



الربط مع الحياة

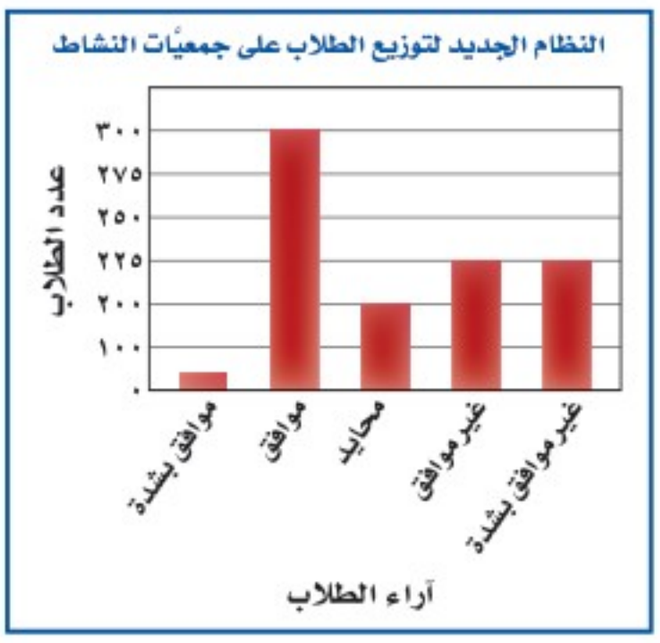
أثبتت الدراسات أن النشاط التربوي والحركي يزيد حيوية الطلاب ويشبع رغباتهم، ويحسّن العمليات العقلية، ويركّز انتباههم، ويزيد قدرتهم على التحصيل الدراسي والمشاركة والاندماج مع أقرانهم.

مثال ٣ نتائج مضللة

جمعيات النشاط: يفكر قائد مدرسة ثانوية كبيرة في تطبيق نظام جديد لتوزيع الطلاب على جمعيات النشاط، فوزّع استبانة على الطلاب يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد.

السؤال: ما رأيك في تطبيق النظام الجديد لتوزيع الطلاب على جمعيّات النشاط؟

الاستنتاج: لن ينزعج الطلاب من تطبيق نظام توزيع الطلاب على جمعيّات النشاط.



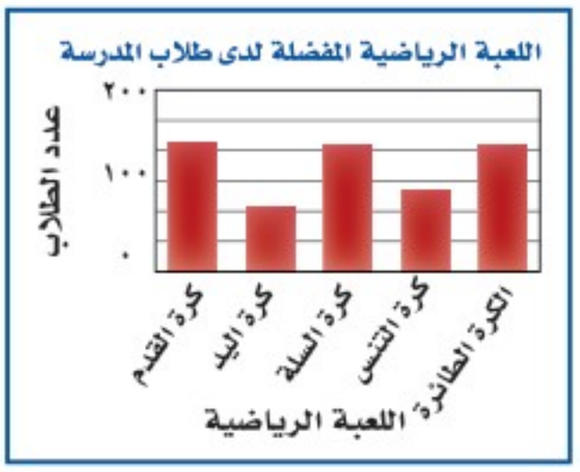
حدّد، إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.

يبدو للوهلة الأولى أن معظم الطلاب موافقون على تطبيق النظام الجديد، ومع ذلك فإن أطوال فترات التدريج غير ثابتة. وإذا ألقينا نظرة فاحصة نجد أن نحوًا من ٤٥٠ طالبًا غير موافقين أو غير موافقين بشدة على هذا النظام الجديد، وأن عدد الموافقين يزيد قليلاً على ٣٠٠ طالب فقط.

لذا فإن التمثيل البياني المعروض مضلّل، والاستنتاج غير صادق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

تحقق من فهمك



٣) يوضح التمثيل بالأعمدة المجاور نتائج استطلاع أجراه مدرس التربية الرياضية لمعرفة اللعبة الرياضية التي يفضلها طلاب المدرسة.

السؤال: ما اللعبة الرياضية التي تفضلها؟

الاستنتاج: كرة اليد هي اللعبة الأقل شيوعًا بين الألعاب الرياضية المفضلة.

حدّد ما إذا كان التمثيل بالأعمدة يقدم صورة صادقة أم لا لنتائج الدراسة المسحية. وفسّر إجابتك.

تأكد

مثال ١ **أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:**

١) **إعادة تدوير:** ترغب شركة في إعادة تدوير الأوراق الزائدة، فجمعتها في رزم ارتفاع الواحدة منها ٥٠سم، وقد أحصى خالد عدد الرزم في نهاية كل شهر من السنة فكانت: ١٥، ١٢، ١٤، ١٥، ١٨، ١٥، ١٣، ١٤، ١٣، ١٢، ١٥، ١٨.

٢) **سياحة:** تريد إحدى وكالات السياحة التي تعمل عبر الإنترنت أن تنظم رحلات للعائلات، فأجرت مسحًا حول المكان المفضل لها لقضاء الإجازة. وقد كانت الأماكن الخمسة الأولى هي: الشواطئ ٢٥٪؛ المتنزهات ٢٢٪؛ البر ٢١٪؛ المواقع الأثرية التاريخية ١٧٪؛ الجبال ١٥٪.

مثال ٢ **حدِّد صحة المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحيّة فيما يأتي:**

٣) **تلفاز:** إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية حيث تريد محطة تلفزيونية أن تغير نشاطها ، فأرسلت ١٠٠٠ استبانة بالبريد إلى أشخاص تمّ اختيارهم عشوائيًّا تقع ضمن منطقة بثها وتلقت ٧٥٠ ردًّا.

السؤال: ما نوع البرامج التلفزيونية التي تفضلها؟

الاستنتاج: يجب أن تتحول المحطة إلى محطة إخبارية.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
رياضية	٢٦٪
دينية	٣٢٪
إخبارية	٣٩٪
تعليمية	٣٪

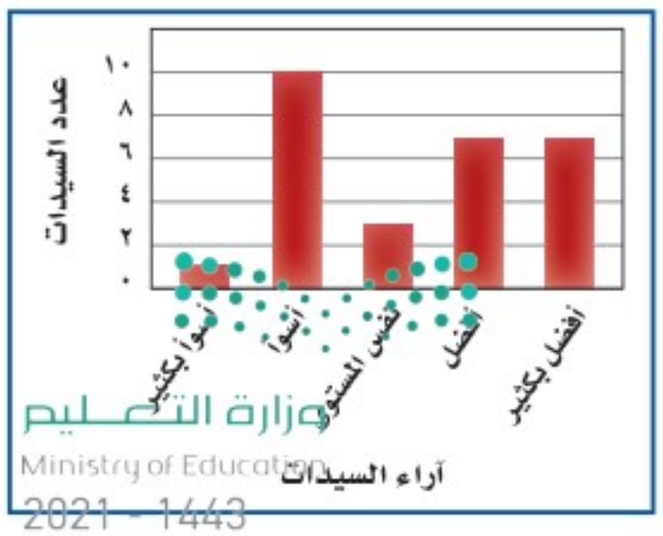
٤) **رياضة:** استطلعت إدارة التعليم في إحدى المناطق آراء ٣٥٨٥ طالبًا عن رياضتهم المفضلة.

السؤال: ما الرياضة التي تفضل المشاركة فيها؟

النتائج: كرة الطائرة ٢٧١، كرة القدم ٥٧٠، كرة السلة ٤٣٦، التايكوندو ٢٧٩، المصارعة ١٩٧، جري التتابع ٢٠٩، السباحة ٣١٩، الجمباز ١٩٧، كرة اليد ٢٨٩، التنس ٢٠٢، رياضات أخرى ٦١٦.

الاستنتاج: كرة القدم هي الرياضة التي يفضل الطلاب المشاركة فيها.

مثال ٣ **حدد إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.**

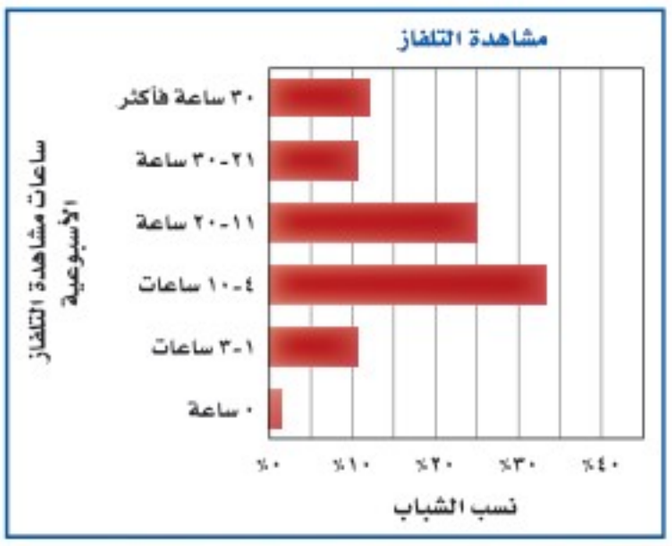


وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٥) **مسحوق غسيل:** وزعت عينات من مسحوق غسيل على مجموعة من السيدات لمقارنته بمسحوق الغسيل الذي يستخدمنه.

السؤال: مارأيك باستبدال مسحوقك القديم بالمسحوق الجديد

الاستنتاج: لن تستبدل معظم السيدات مسحوق الغسيل الذي يقمن باستعماله



٦) **تلفاز:** أجرت شبكة إعلامية دراسة حول عدد الساعات التي يقضيها الشباب في مشاهدة التلفاز في الأسبوع الواحد، وعرضت النتائج بالتمثيل البياني المجاور.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ **أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:**

٧) **كتب:** أجرى متجر كتب مسحًا لمعرفة موضوع الكتب المفضلة لزبائنه، وكانت النتائج على النحو الآتي: الثقافية ٢١٪، القصص ١٩٪، المغامرات ١٢٪، العلمية ١٧٪، الدينية ١٨٪، التاريخية ١٣٪.

٨) **أنشطة صيفية:** أُجريت دراسة حول الأنشطة الصيفية المفضلة التي يمارسها الطلاب، وعُرضت نتائجها في الجدول المجاور.

الأنشطة الصيفية			
السباحة	٦٥٠	المخيمات	٤٣٢
الرحلات	٨٨٥	المطالعة	٢٨١
الرياضة	١١٢٣	أخرى	٥١٤

مثال ٢ **حدّد صحة كلٍّ من المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يأتي:**

٩) **قيادة:** أجرت صحيفة استطلاعًا شمل ٧٥٠ شخصًا من سكان إحدى المدن.

السؤال: هل تتحدث عبر الهاتف الجوّال في أثناء قيادة السيارة؟

النتائج: لا ٧, ٢٠٪؛ بضع مرات ٧, ٤٨٪؛ على الأكثر ١, ٥٪؛ دائمًا ٥, ٢٥٪.

الاستنتاج: سائقو هذه المدينة غير حريصين.

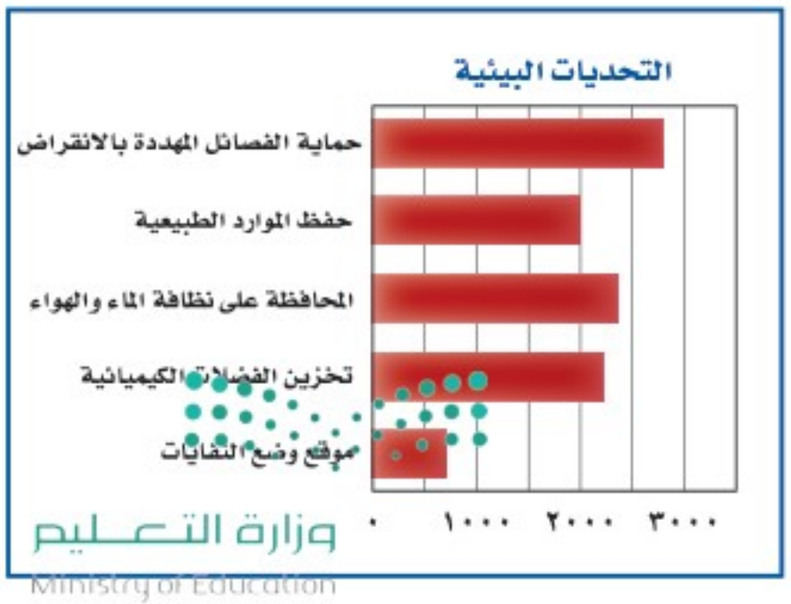
١٠) **قراءة:** أجرت مجلة نسائية استطلاعًا طلبت فيه من الطلاب والطالبات ذكر سبب القراءة.

النتائج: للاستمتاع ٢٥٪، لتعلم أشياء جديدة ٢٤٪، لتلبية طلبات المدرسة ١٨٪، بسبب الملل وعدم وجود شيء آخر ١٧٪، لأن أصدقاءهم يحبون القراءة ويتحدثون عن الكتب ١٦٪.

الاستنتاج: يقرأ الطلاب والطالبات الكتب لأسباب متعددة.

حدِّد ما إذا كانت طريقة تمثيل النتائج تعطي صورة صحيحة حول نتائج كلٍّ من الدراسات المسحية الآتية، وفسّر إجابتك.

١١) **بيئة:** التمثيل بالأعمدة المجاور يمثل نتائج إجراء مجلة بيئية دراسة مسحية شملت ١٠٠٠٠ شخص تم اختيارهم عشوائيًّا.



السؤال: ما التحدي البيئي الأكبر في القرن الحادي والعشرين؟

الاستنتاج: إيجاد مكان لوضع النفايات أمر غير مهم.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الربط مع الحياة

تعمل جمعية الهلال الأحمر السعودي على نقل المرضى والمصابين والجرحى، وتوفير الإسعافات العاجلة الطارئة، وعمل الدورات التدريبية في برامجها المختلفة، وتقديم الخدمات والمساعدات الطبية لحجاج بيت الله الحرام ورعايتهم صحيًّا.

١٢) **تدريبات السلامة:** يعقد الهلال الأحمر دورات في السلامة مخصَّصة لطلاب المدارس المتوسطة والثانوية. سجَّل ٧٤٪ من المشاركين في برنامج السلامة البحرية، ١٠٪ في برنامج رعاية الأطفال، ١٦٪ في برنامج الإسعافات الأولية.

السؤال: هل يجب أن يستمر الهلال الأحمر في طرح برنامج رعاية الأطفال؟ استعمل البيانات في كتابة استنتاج عن دورات السلامة.

١٣) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة طريقة أخرى لتحليل البيانات.

أ) حسيًّا: تجد أدناه توزيعًا لقطع نقود في مجموعات غير متساوية. ضع قطع نقود على الطاولة في مجموعات مماثلة للصورة.

٨ ٨ ٦ ٦ ٥ ٤ ٣ ٣ ٢

ب) بيانيًّا: مثّل هذه المجموعات بالنقاط، واكتب فوق كل عمود من النقاط الفرق بين عدد القطع في العمود والمتوسط الحسابي لعدد القطع في المجموعة الواحدة، ثم أوجد القيمة المطلقة لهذه الفروق.

جـ) تحليليًّا: حرّك القطع لتجعل المجموعات متساوية، بحيث تحرك قطعة واحدة كل مرة، وتحرك القطعة مرة واحدة فقط، وعُدّ الحركات. فيوضِّح ذلك مدى اختلاف المجموعات في الوضع الأصلي عنها في الوضع الجديد.

د) تحليليًّا: أوجد متوسط القيم المطلقة، وصف ما تمثّله هذه القيمة، ووضِّح معناها في هذه الحالة.

مسائل مهارات التفكير العليا

١٤) **تحدَّ:** أوجد مجموعة من الأعداد يكون المتوسط الحسابي لها أكبر من الوسيط.

١٥) **مسألة مفتوحة:** صف دراسة مسحية ترغب في أن تجريها. وحدّد العينة والمجتمع والأسئلة وكيفية عرض النتائج.

١٦) **اكتب:** اشرح لماذا قد تعرض إحدى الشركات نتائج الدراسة المسحية بصورة غير دقيقة. وأعطِ مثالاً للطريقة التي يمكن أن يتم بها ذلك.

تدريب على اختبار

١٧) **إجابة قصيرة:** بيعت ١٠٠٠ تذكرة في مهرجان. ثمن التذكرة ١٥ ريالاً للكبار، و٨ ريالات للأطفال، فكانت حصيلة المبيعات ١٢٩٠٠ ريال، فما عدد تذاكر الأطفال المبيعة؟

١٨) إذا كانت ٤,٥ كيلومترات تعادل ٢,٨ ميل تقريبًا، فكم ميلًا تقريبًا يساوي ٦,١ كيلومترات؟

أ) ٣,٢ أميال
ب) ٣,٦ أميال
جـ) ٣,٨ أميال
د) ٤,٠ أميال

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

١٩) **كتب:** للتحقق من جودة الكتب التي تتمّ طباعتها يتم فحص الكتاب الخمسين من كل خمسين كتابًا تُطبع في المطبعة. حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، وهل هي متحيزة أم غير متحيزة؟ وإذا كانت غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. (الدرس ١٠ - ١)

في السؤالين ٢٠-٢١ افترض أن ∠ أ زاوية حادة في المثلث القائم أ ب جـ، ثم أوجد : (الدرس ٩-٧)

٢٠) جتا أ، ظا أ إذا كان جا أ = $\frac{١}{٤}$

٢١) جا أ، جتا أ إذا كان ظا أ = $\frac{٥}{٣}$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة :

أوجد الوسط الحسابَي، والوسيط والمنوال لكل مجموعة بياناتٍ فيما يأتي، قرّب إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ إذا لزم:

٢٢) ١٠٠، ١٠٥، ١٠٠، ١٠٥، ١٠٠، ١١٠

٢٣) ١٢، ٢٥، ١٤، ٣٥، ٤٢، ٢٧، ٣١، ٤٨

٢٤) ٥٥، ٦٥، ٤٥، ٣٥، ٦٥، ٢٥، ٨٥

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست تنظيم نتائج الدراسة المسحية وتلخيصها.

والآن

- أستعمل إحصائيات العينة لتحليل نتائج الدراسة المسحية.
- أحلّل البيانات باستعمال إحصائيات العينة.

المفردات

الإحصاء الاستدلالي

الإحصائي

المَعْلَمَة

البيانات الوحيدة المتغير

مقاييس التشتت

الانحراف المتوسط

الانحراف المعياري

التباين

لماذا ؟

في بداية حصة الرياضيات طلب المدرس من كل طالب في الصف سحب ٩ قطع نقدية عشوائيًّا من وعاء فيه ١٠٠٠ قطعة نقد من فئة النصف ريال، ثم إعادتها للوعاء بعد حساب متوسط تواريخ إصدار هذه العينة من قطع النقد.

ما وجه المقارنة بين متوسط تواريخ إصدار القطع التسع ومتوسط إصدار جميع القطع النقدية الألف الموجودة في الوعاء؟

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع: تُستعمل في هذا الموقف إحصائيات العينة للتوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملًا. وهو ما يُسمى **الإحصاء الاستدلالي**. وفي الموقف المذكور أعلاه يسحب كل طالب عينة من قطع النقد من الوعاء، حيث تمثل قطع النقود الألف المجتمع. و**الإحصائي**: مقياس يصف إحدى خصائص العينة. أما **المَعْلَمَة** فهي مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع. ويتم تقدير معالم المجتمع بناءً على إحصائيات عينة عشوائية ممثلة. وتتغير قيمة الإحصائي عادة من عينة إلى أخرى إلا أن معلمة المجتمع تبقى ثابتة؛ لأنها تمثّل المجتمع كاملًا.

مثال ١ تعيين إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

عيّن العينة والمجتمع في كل من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع.

أ) اختيرت عينة عشوائية من إحدى الجامعات مكوّنة من ٤٠ من طالبي المنح الدراسية، ثم حُسب متوسط درجاتهم.

العينة : مجموعة الطلاب الأربعين المتقدمين بطلبات المنح الدراسية .
المجتمع : جميع الطلاب طالبي المنح الدراسية .
إحصائي العينة : متوسط درجات الطلاب الأربعين .
مَعْلَمة المجتمع : متوسط درجات جميع طالبي المنح الدراسية .

ب) اختيرت عينة عشوائية طبقية من الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الشرقية والغربية والوسطى، ثم حُسب وسيط رواتب هؤلاء الممرضين.

العينة : الممرضون الذين تم اختيارهم عشوائيًّا من جميع مستشفيات المناطق الثلاث.
المجتمع : جميع الممرضين العاملين في هذه المستشفيات في المناطق الثلاث.
إحصائي العينة : وسيط رواتب الممرضين في العينة.
مَعْلَمة المجتمع : وسيط رواتب جميع الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الثلاث.

تحقق من فهمك

١) **أغذية:** يتم اختيار عبوة عشوائيًّا من خط إنتاج أحد الأغذية المحفوظة، ثم يُؤخذ بدءًا من تلك العبوة، العبوات التي أرقامها من مضاعفات ٥٠، وتُدَوّن كتلتها ويُحسب المتوسط في العينة كتل الإنتاج اليومي.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

التحليل الإحصائي: تُسمّى البيانات التي تتضمن متغيرًا واحدًا **بيانات وحيدة المتغير**. ويمكن التعبير عن هذه البيانات بمقاييس النزعة المركزية مثل المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال. كما يمكن التعبير عنها أيضًا **بمقاييس التشتت** مثل المدى والربيعات والمدى الربيعي.

مفهوم أساسي — **مقاييس التشتت**

أضف إلى مطويتك

المقياس	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المدى	الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.	لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات.
الربيعات	القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.	لتحديد القيم الواقعة في الجزء الأعلى أو الجزء الأسفل من مجموع البيانات.
المدى الربيعي	مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات؛ وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.	لتحديد القيم الواقعة في النصف الأوسط من مجموعة البيانات.

الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات. تذكّر أن القيمة المطلقة لعدد معين هي بعده عن الصفر على خط الأعداد.

مفهوم أساسي — **الانحراف المتوسط**

أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي.

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي.

الخطوة ٣: اقسم هذا المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات.

مثال ٢ — **استعمال الانحراف المتوسط**

قراءة: سأل معلم طلابه عن عدد الكتب التي يقرؤونها أسبوعيًّا. وقد تلقّى الإجابات الآتية: ٢، ٢، ٣، ٤، ١٤. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ١: المتوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي ٥

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي.

$|٢ - ٥| + |٢ - ٥| + |٣ - ٥| + |٤ - ٥| + |١٤ - ٥| = ٣ + ٣ + ٢ + ١ + ٩ = ١٨$

الخطوة ٣: اقسم المجموع على عدد القيم: $١٨ \div ٥ = ٣,٦$

تحقق من فهمك

٢) **تسويق:** رصد موزِّع عدد صناديق العصير اليومية التي بيعت فكانت: ١٢، ٣٢، ٣٦، ٤١، ٢٢، ٤٧، ٥١، ٣٣، ٣٧، ٤٩. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات.

الانحراف المعياري هو القيمة التي تُحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي. ويُرمز إليه بالرمز "ع". أما **تباين** مجموعة من البيانات فهو مربع الانحراف المعياري لتلك البيانات.

الربط مع الحياة

تؤكد الدراسات على أهمية قراءة الشباب للكتب المناسبة لمراحلهم العمرية، حيث تسهم في بناء معارفهم وتوسيع مداركهم، وتدربهم على مهارات التواصل، وتنمي قدراتهم الإبداعيّة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

استعمل الطريقة المبينة أدناه لحساب التباين والانحراف المعياري.

إرشادات للدراسة

رموز

يحسب المتوسط الحسابي للعينة وللمجتمع بالطريقة نفسها. وفي العادة يُرمز إلى متوسط العينة بالرمز $\overline{س}$، ولكن سوف يستعمل هذا الرمز في هذا الكتاب ليدل على متوسط المجتمع.

ملخص المفهوم التباين والانحراف المعياري

أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$.

الخطوة ٢: أوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات لتحصل على التباين.

الخطوة ٣: أوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين.

مثال ٣ إيجاد التباين والانحراف المعياري

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة للأعداد ٣، ٦، ١١، ١٢، ١٣.

الخطوة ١: لإيجاد المتوسط الحسابي اجمع قيم البيانات، ثم اقسم المجموع على عددها.

$$\overline{س} = \frac{٣ + ٦ + ١١ + ١٢ + ١٣}{٥} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$$

الخطوة ٢: لإيجاد التباين أوجد مربع الفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم.

$$ع^{٢} = \frac{(٣ - ٩)^{٢} + (٦ - ٩)^{٢} + (١١ - ٩)^{٢} + (١٢ - ٩)^{٢} + (١٣ - ٩)^{٢}}{٥}$$

$$= \frac{(-٦)^{٢} + (-٣)^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢}}{٥}$$

$$= \frac{٣٦ + ٩ + ٤ + ٩ + ١٦}{٥} = \frac{٧٤}{٥}$$

الخطوة ٣: الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين.

$ع^{٢} = \frac{٧٤}{٥}$ التباين

$\sqrt{ع^{٢}} = \sqrt{\frac{٧٤}{٥}}$ أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$ع \approx ٣,٨$ استعمل الحاسبة

إذن المتوسط الحسابي ٩، والتباين $\frac{٧٤}{٥}$، والانحراف المعياري ٨ , ٣ تقريبًا.

إرشادات للدراسة

فئات البيانات

تُسمى البيانات الكمية باسم البيانات الناتجة عن القياس، وتُسمى البيانات النوعية باسم البيانات التصنيفية.

تحقق من فهمك

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

٣أ) ٦، ١٠، ١٥، ١١، ٨ **٣ب)** ٩٢، ٨٤، ٧١، ٨٣، ١٠٠

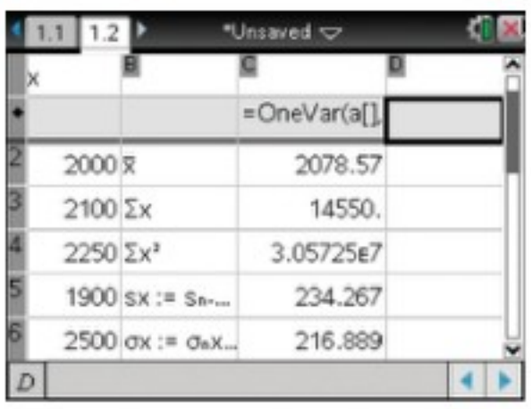
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

يمكن تفسير مدى انتشار البيانات من خلال الانحراف المعياري. فعلى سبيل المثال، إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ٣، فإن معظم قيم البيانات قريبة جدًّا من المتوسط الحسابي، أما إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ١٥، فإن هذه البيانات متباعدة ومنتشرة على مدى أوسع، وقد يكون من بينها قيم متطرفة.

مثال ٤ من واقع الحياة — التحليل الإحصائي

تغذية: يسجِّل خالد عدد السعرات الحرارية التي يتناولها كل يوم. أوجد الانحراف المعياري مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات الآتية:

اليوم	السبت	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
عدد السعرات	١٨٠٠	٢٠٠٠	٢١٠٠	٢٢٥٠	١٩٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠



استعمل الآلة الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري. واضغط على المفاتيح on ثم أدخل كل قيمة من قيم البيانات في القائمة مع الضغط على enter بعد إدخال كل قيمة. ولإظهار قيمة الانحراف المعياري على الشاشة اضغط بالترتيب

menu ، 4:Statistics ، 1:Stat Calculations ، 1:One-Variable Statistics...

فيكون الانحراف المعياري ٢١٦,٩ تقريبًا.

تحقق من فهمك

٤) رصد خالد استهلاكه من السعرات خلال أسبوع آخر فكان:

١٩٥٠، ٢٠٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠، ١٩٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠

أوجد الانحراف المعياري لاستهلاكه من السعرات في هذا الأسبوع.

تأكد

مثال ١ عيّن العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتيين، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع:

١) **تعليم:** اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٣ طلاب من الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة، وسُئلوا إن كانوا راغبين في دراسة الهندسة بالجامعة، ثم حُسبت النسبة المئوية للذين كانت إجاباتهم "نعم".

٢) **كتب:** أُجريت دراسة شملت عينة مكوّنة من ١٠٠٠ طالب في الجامعات السعودية حول المبالغ التي ينفقونها في شراء الكتب الإضافية في كل عام، ثم حُسب المتوسط الحسابي لهذه المبالغ.

مثال ٢

٣) **عمل إضافي:** أحصى مدير أحد المصانع عدد ساعات العمل الإضافي لعمال أحد الأقسام في الأسبوع فكانت: ١٠، ١٢، ٠، ٦، ٩، ١٥، ١٢، ١٠، ١١، ٢٠. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٣ أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

٤) ٣، ٤، ١٨، ٢١، ١٧

٥) ١٢، ١٥، ١٨، ٢١

مثال ٤ ٦) **إلكترونيات:** أجرى محمود مسحًا لعدد الأجهزة الإلكترونية الموجودة في منزل كل واحد من زملائه في الفصل فكانت إجاباتهم: ٣، ١٠، ١١، ١٠، ٩، ١١، ١٢، ٨، ١١، ٨، ٧، ١٢، ١١، ١١، ٥. أوجد الانحراف المعياري مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات.

تدرب وحل المسائل

مثال ١ **عيّن العينة والمجتمع في كلٍّ من الموقفين الآتيتين، ثم صف إحصائي العينة ومَعْلَمة المجتمع:**

٧) اختيرت عينة عشوائية طبقية من طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير التعليمية، وسُئل أفراد العينة عن الوقت الذي يقضيه كلٌّ منهم في الأنشطة المنهجية الإضافية خلال الأسبوع.

٨) اختيرت عينة عشوائية طبقية مكوّنة من ٢٥٠٠ طالب من طلاب المدارس المتوسطة في المملكة. وسُئل أفراد العينة عن المبلغ الذي ينفقه كلٌّ منهم في الشهر.

مثال ٢ **أوجد الانحراف المتوسط مقرِّبًا إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:**

٩) **أقراص مدمجة:** طلب مدرس إلى طلاب الصف أن يحدِّدوا عدد الأقراص المدمجة التي يمتلكونها فكانت النتائج كما في الجدول المجاور.

عدد الأقراص المدمجة					
٢٦	٣٩	٥	٨٢	١٢	١٤
٠	٣	١٥	١٩	٤١	٦
٢	٠	١١	١	١٩	٢٩

١٠) **مبيعات:** رصد صاحب محل عدد الأكياس التي تُباع في كل ساعة من أحد أنواع الحلوى، فكانت:
١٦، ٢٤، ١٥، ١٧، ٢٢، ١٦، ١٨، ٢٤، ١٧، ١٣، ٢٥، ٢١

مثال ٣ **أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:**

١١) ٣، ٨، ٧، ١٢

١٢) ٧٦، ٧٨، ٨٣، ٧٤، ٧٥

مثال ٤ ١٣) **مزاد:** يرسم نجيب لوحات لمناظر طبيعية ويعرضها للبيع في المزاد. فكان ثمن بيع بعض هذه اللوحات بالريال: ٣٢٥، ٤٥٠، ٥٠٠، ٥٧٥، ٢٢٥، ٨٥٠، ٦٠٠، ٣٥٠، ٤٥٠، ٥٠٠.
أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ.

١٤) **كرة السلة:** يبيِّن الجدول المجاور أطوال لاعبي فريق كرة السلة في أحد الأندية الرياضية بالسنتمترات.

أطوال لاعبي فريق كرة السلة				
٢٠٣	١٩٦	٢١١	١٨٨	١٩٨
٢٠٣	٢١١	١٨٨	٢١١	١٧٥
١٩٨	٢١٦	٢٠٦	٢٠٦	٢٠١

أ) أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للأطوال.

ب) إذا غيَّرنا اللاعب الذي طوله ١٧٥ سم بلاعب طوله متر وسبعون سنتمترًا، فأوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري. وصف أثر هذا التبديل في النتائج السابقة.

الربط مع الحياة

يبلغ طول أطول لاعبي كرة السلة في المملكة ٢٠٨ سم.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مسائل مهارات التفكير العليا

١٥) **اكتشف الخطأ:** تصف كلٌّ من سحر ورغد طريقة لزيادة دقة دراسة مسحية، فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

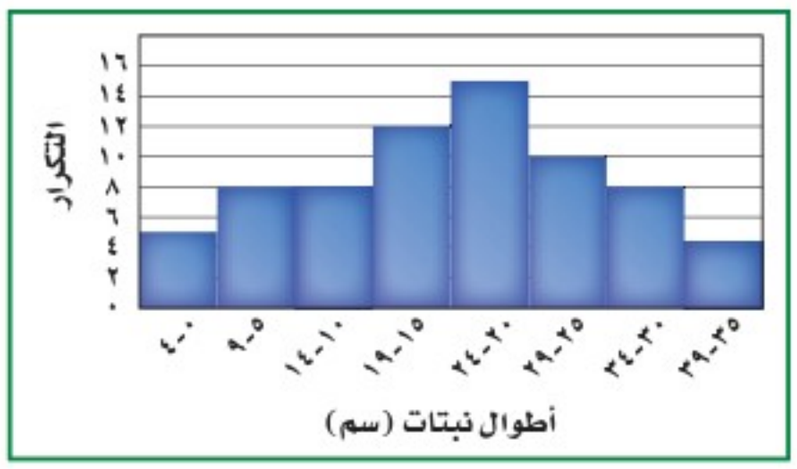
سحر

يجب أن تشتمل الدراسة المسحية على أكبر عدد ممكن من أفراد المجتمع.

رغد

يجب اختيار عينة الدراسة المسحية عشوائيًا، ويجب أن تُؤخذ عدة عينات عشوائية.

١٦) **تحدٍّ:** أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجتمع البيانات الممثَّلة بالمدرج التكراري أدناه.



١٧) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا، وفسّر إجابتك:

"العينتان العشوائيتان المأخوذتان من المجتمع نفسه لهما المتوسط الحسابي والانحراف المعياري نفساهما".

١٨) **مسألة مفتوحة:** صِفْ موقفًا من واقع الحياة يكون من المفيد فيه استعمال متوسط العينة لتقدير متوسط المجتمع. وصِفْ طريقة اختيار عينة عشوائية من هذا المجتمع.

١٩) **اكتب:** قارن بين الانحراف المعياري والانحراف المتوسط.

تدريب على اختبار

٢٠) **إجابة قصيرة:** زارت مجموعة من الطلاب مبنى التلفزيون، فدخل ٢٠ طالبًا منهم إلى قسم الأخبار. فإذا شكّل هؤلاء الطلاب ١٦٪ من مجموعة الطلاب، فما عدد أفراد المجموعة؟

٢١) أطوال أعلى ٧ أشجار في حديقة هي: ١٩، ٢٤، ١٧، ٢٦، ٢٤، ٢٠، ١٨ قدمًا. أوجد الوسيط لهذه الأطوال؟

أ) ١٧ ج) ٢١

ب) ٢٠ د) ٢٤

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

أيُّ مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كلٍّ ممَّا يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة هذا المقياس: (الدرس ١٠-٢)

٢٢) جمعيات النشاط: كانت أعداد طلاب أحد الصفوف قد وُزِّعت على جمعيات النشاط على النحو الآتي:
٨، ١٢، ١٨، ٢٥، ٢١، ٥، ١٠، ١٤.

٢٣) درجات اختبار: كانت درجات بعض الطلاب في مادة الرياضيات على النحو الآتي:
٧٨، ٨١، ٨٥، ٨٦، ٨٨، ٨٥، ٩٠، ٩١، ٨٥، ٩٥، ٩٨.

حدِّد في كلٍّ ممَّا يأتي، هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ وبرِّر إجابتك: (الدرس ١٠ - ١)

٢٤) تسوّق: طُلب إلى كل عاشر شخص يدخل إلى مجمع تجاري أن يُسمّي المتجر المفضل لديه.

٢٥) رياضة: سُئل كل خامس شخص في مهرجان رياضي عن القناة التلفزيونية التي يفضلها.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا اخترت عشوائيًّا بطاقةً واحدةً من كيسٍ يحوي ٣ بطاقاتٍ حمراء و ٦ بطاقات خضراء و ٥ بطاقات صفراء، و٨ بطاقات برتقالية اللون، فأوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية:

٢٦) ح (حمراء)
٢٧) ح (برتقالية)
٢٨) ح (صفراء أو خضراء)
٢٩) ح (ليست برتقالية)
٣٠) ح (ليست خضراء)
٣١) ح (حمراء أو برتقالية)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل ١٠

اختبار منتصف الفصل

الدروس ١٠-١ إلى ١٠-٣

عيّن العينة والمجتمع الذي اختيرت منه فيما يأتي، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المُستعمَل: (الدرس ١٠-١)

١) **شركة حليب:** دعت شركة إنتاج حليب ١٠٠ طفلٍ ووالدِيهِم لتذوُّق حليب بمذاقٍ جديد.

٢) **غداء في فندق:** يريد مدير فندق إضافة تعديلاتٍ على قائمة الطعام في الفندق، فسأل نُزلاء الغرف ذات الأرقام الفردية عن القائمة الجديدة المُقتَرحة للطعام.

٣) **دواء:** قامت مؤسسةٌ للبحوث العلمية بتجربة دواءٍ جديد على مجموعةٍ من الفئران، فوجدوا أن فأرًا من بين كل ٥٠ فأرًا أخذوا الدواء قد تساقط شعرهم، فاستنتجوا النتيجة نفسها على كل ٥٠ شخصًا سيتناولون الدواء.

٤) **أنشطة مدرسية:** تريد قائدة مدرسةٍ إشراك الطالبات في الأنشطة المدرسية، فأرسلت نماذج لجميع الطالبات؛ لتحديد النشاط الذي ترغب الطالبة في الاشتراك فيه.

في كلٍّ مما يأتي، حدَّد ما إذا كانت العينة كلها متحيزةً أم غيرَ متحيزةٍ، وفسّر إجابتك: (الدرس ١٠-١)

٥) **المادة المفضلة:** سُئِلَ كل خامس طالب يدخل المدرسة عن مادته المفضلة.

٦) **تسويق:** سُئِلَ كل شخصٍ يغادر مجمعًا تجاريًّا عن اسم المحل الذي يفضل التسُّوقَ منه.

٧) **كرة قدم:** وقف عددٌ من الطلَّاب عند مدخل مدرسةٍ ليسألوا كل عاشر طالبٍ يدخُلُها عن اسم فريق كرة القدم الذي يشجّعه.

٨) **ألوان:** سُئِلَتْ كل خامسِ طالبة تدخلُ المدرسة عن لونها المفضل.

٩) **اختيار من متعدد:** كل ١٠ دقائق يُسجّل خالدُ ما يُعرَضُ على التلفاز، وهل هو برنامج أم مسلسل، أيُّ العبارات التالية تصف العينة؟

أ) بسيطة.
جـ) منتظمة.
ب) طبقية.
د) لا شيء ممَّا ذُكر.

أيُّ مقاييس النزعة المركزية (إن وجُدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كلٍّ ممَّا يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس: (الدرس ١٠-٢)

١٠) **حديقة الحي:** أعمار مجموعة من الأطفال الذين يلعبون في حديقة الحي هي: ٢، ٣، ٢، ٢، ٤، ٢، ٣، ٢، ٨، ٣، ٤، ٢

١١) **إعادة تدوير:** عدد العلب المعدنية التي تمَّ تجميعها عند مدرسة في كل أسبوع لإعادة تدويرها هو:
٢٢، ١٠، ٢٣، ٢٥، ٢٤، ٢٣، ٢٥، ١٩.

١٢) **حدِّد ما إذا كانت طريقة تمثيل النتائج أدناه تُعطِي صورة صحيحة حول نتيجة الدراسة المسحية الآتية أم لا:**

(الدرس ١٠-٢)

أُجريَتْ دراسةٌ مسحيةٌ شمِلَتْ ٥٠٠ طالبٍ.

السؤال: ما الهدف الرئيس من ذهابك للمدرسة.

الاستنتاج: الاستعداد لبناء مستقبلٍ ليس مهمًّا على الإطلاق

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقربًا إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ لكلٍّ من مجموعَتَي البيانات الآتيتين:

(الدرس ١٠-٣)

١٣) ٢، ٤، ٥، ٧، ٧، ٩

١٤) ١٣، ١٤، ١٨، ٢١

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

التباديل والتوافيق

لماذا ؟

أخبر المدرّبُ نوافَ أنه سيكون خامس لاعب يضرب ركلة الترجيح، إذا انتهت المباراة إلى ضربات الترجيح.

واعتمد المدرب الترتيب الأبجدي أساسًا في تشكيل الفريق؛ لترتيب من يقوم بركلات الترجيح.

التباديل: تُسمى قائمة جميع الأشخاص أو الأشياء في مجموعة معينة **فضاء العينة**. وعندما تُنظّم العناصر، بحيث يكون ترتيبها مهمًّا، وتُكتب جميع التراتيب الممكنة لهذه العناصر، يُسمَّى كلٌّ من هذه التراتيب **تبديلاً**.

إذا كان في ذهن المدرب ٤ لاعبين لضرب ركلات الترجيح الأربع الأولى، فإنه يمكن استعمال مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد التباديل الممكنة لهؤلاء الأربعة. فإذا اختير لاعب معين ليكون أول من يضرب، فلن يكون اسمه مطروحًا عند اختيار اللّاعب الثاني؛ لأنه لا يمكن أن يضرب اللاعب ركلة الترجيح مرتين.

عدد التباديل		عدد خيارات اللاعب الأول		عدد خيارات اللاعب الثاني		عدد خيارات اللاعب الثالث		عدد خيارات اللاعب الرابع
ل	=	٤	×	٣	×	٢	×	١

= ٢٤

هناك ٢٤ طريقة ممكنة لترتيب أول أربعة لاعبين.

مثال ١ من واقع الحياة — التباديل

رحلات: تخطّط وكالة سياحة وسفر لرحلة سياحية، يزور المسافرون خلالها ٥ مدن في المملكة. بكم طريقة يمكن أن ترتب الوكالة المدن الخمس في خطة الرحلة؟

عدد طرق ترتيب المدن = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

هناك ١٢٠ طريقة ممكنة لترتيب المدن الخمس.

تحقق من فهمك

١) **محاضرات:** دخل ناصر وخمسة من أصدقائه قاعة محاضرات. فبكم طريقة مختلفة يمكنهم أن يجلسوا جميعًا على ٦ مقاعد خالية في صفٍّ واحدٍ؟

يمكنك أن تكتب العبارة المستعملة في المثال ١؛ لحساب عدد التباديل للمدن الخمس (٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١) في صورة ٥! وتُقرأ "مضروب العدد خمسة".

مفهوم أساسي — المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: **مضروب** العدد الصحيح الموجب (ن)، هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن (ن) أو تساويه.

الرموز: ن! = ن (ن − ١) (ن − ٢) (ن − ٣) × ... × ١، ن ≥ ١، أيضاً ٠! = ١

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق

درست استعمال مبدأ العد الأساسي.

والآن

- أستعمل التباديل.
- أستعمل التوافيق.

المفردات

فضاء العينة

التبديل

المضروب

التوافيق

إذا كان في ذهن المدرب ٥ لاعبين لضرب ركلات الترجيح الثلاث الأولى، فإنه يمكنك استعمال مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد التباديل.

طرق اختيار اللاعب الأول × طرق اختيار اللاعب الثاني × طرق اختيار اللاعب الثالث

٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ تبديلًا

لاحظ أن: $٥ \times ٤ \times ٣ = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥}{١ \times ٢}$؛ ويمكنك تعميم هذه العلاقة بالقانون الآتي:

قراءة الرياضيات

رموز

يمكن كتابة عدد التباديل لعناصر عددها ن، مأخوذة راءً في كل مرة بالرمز ${}^{ن}ل_{ر}$ أو ل(ن، ر).

مفهوم أساسي — **قانون التباديل**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: عدد التباديل لعناصر عددها (ن) مأخوذة (ر) عنصرًا في كل مرة هو ناتج قسمة ن! على (ن− ر)!

الرموز: ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$

مثال ٢ من واقع الحياة — **استعمال قانون التباديل**

مكتبة: يريد أمين المكتبة أن يعرض ٦ مجلات من بين ١٠ مجلات مختلفة على رفٍّ. فبكم طريقة يمكنه ذلك؟

$${}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$ قانون التباديل

$${}^{١٠}ل_{٦} = \frac{!١٠}{!(٦ - ١٠)}$$ ن= ١٠، ر= ٦

$$= \frac{!١٠}{!٤}$$ بسّط

$$= \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}$$ اقسم على العوامل المشتركة

$$= ١٥١٢٠٠$$ بسّط

تحقق من فهمك

٢) **لوحات:** رسم فنان ١٥ لوحة فنية. فبكم طريقة يمكنه اختيار ١٠ لوحات منها لعرضها في معرض فني.

التوافيق: يُسمّى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية **التوافيق**. ولإيجاد التوافيق المكوّنة من حرفين من بين الحروف أ، ب، جـ يجب أن تكتب جميع التراتيب التي يتكون كلٌّ منها من حرفين وهي:

أ ب　　ب أ　　أ جـ　　جـ أ　　ب جـ　　جـ ب

وبما أن الترتيب غير مهم في التوافيق، فإن أب وَ ب أ يمثّلان الاختيار نفسه. أيْ أن هناك ٢! طريقة لكتابة الحرفين من دون ترتيب؛ لذا اقسم عدد التباديل ${}^{ن}ل_{ر}$ على ٢! لحذف عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها.

إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق

إذا كان الترتيب مهمًّا في المجموعة، فإنها تمثّل تبديلًا. وإذا لم يكن الترتيب مهمًّا في المجموعة فإنها تمثّل توفيقًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الربط مع الحياة

إن تشجيع الأبناء على المشاركة في الأعمال المنزليّة له دور كبير في تكوين الشخصية، وتعويدهم تحمّل المسؤولية، كما يقوي الروابط والصلات بين أفراد الأسرة.

مثال ٣ من واقع الحياة — التوافيق

أعمال منزلية: تطلب أم إلى أبنائها الخمسة القيام ببعض الأعمال المنزلية كل أسبوع. بكم طريقة يمكن اختيار اثنين منهم لتنظيف ساحة المنزل؟

بما أن الترتيب في عملية الاختيار ليس مهمًّا، فيجب أن نجد عدد توافيق ٥ أبناء، اختير اثنان منهم كل مرة.

$$ن\,ق_{ر} = \frac{\text{عدد التباديل}}{\text{عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها}}$$

أوجد عدد التباديل أولًا.

$$٥\,ل_{٢} = \frac{!٥}{!٣} = ٢٠ \qquad ن = ٥، ر = ٢$$

وبما أننا نختار اثنين في كلِّ مرةٍ، فإن عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها هو ٢! = ٢.

إذن $ن\,ق_{ر} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

أيْ أنّ هناك ١٠ طرق ممكنة لاختيار اثنين من الأبناء.

تحقق من فهمك

٣) اختبار: تقدّم سعيد لاختبار في التاريخ، طلب فيه الإجابة عن ١٠ أسئلة من بين ١٢ سؤالًا. بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة؟

يمكنك التوصُّل من خلال ذلك إلى قانون التوافيق.

مفهوم أساسي — قانون التوافيق

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: عدد التوافيق لعناصر عددها ن مأخوذة (ر) عنصرًا كل مرة، يساوي ناتج قسمة ن! على (ن− ر)! ر!

الرموز: $ن\,ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\,ر!}$

مثال ٤ من واقع الحياة — استعمال قانون التوافيق

وظائف: أعلنت شركة عن ٥ وظائف شاغرة لديها، فتقدم للإعلان ٨ أشخاص. بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الخمس؟

$$ن\,ق_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\,ر!}$$ — قانون التوافيق

$$= \frac{!٨}{!٥\,(٥ - ٨)!}$$ — ن =٨، ر= ٥

$$= \frac{!٨}{!٥\,!٣}$$ — بسّط

$$= \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ١ \times ٢ \times ٣}$$ — اقسم على العوامل المشتركة

$$= \frac{٣٣٦}{٦} = ٥٦$$ — هناك ٥٦ طريقة لشغل الوظائف

تحقق من فهمك

٤) كتب: أراد أربعة طلاب أن يختاروا كتبًا يقرؤونها من بين ١٨ كتابًا مختلفًا، تتكون من ٤ روايات، و٦ كتب علمية ، و٨ كتب إسلامية. بكم طريقة يمكنهم اختيار الكتب الأربعة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

يمكن استعمال التباديل والتوافيق لإيجاد احتمال حادثة ما.

إرشادات للدراسة

ثلاثة أرقام:
يمكن اعتبار العدد ٠٢٥ رمزًا لفتح القفل، بينما لا يُعَد العدد ٢٥ رمزًا لفتحه.

مثال ٥ من واقع الحياة — إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل

أقفال: **يتطلب فتح قفل يعمل بالأرقام رمزًا مكوّنًا من ثلاثة أرقام من بين الأرقام صفر إلى ٩ على ألّا يُستعمل العدد الواحد أكثر من مرة واحدة.**

أ) ما عدد الترتيبات المختلفة الممكنة؟

بما أن ترتيب الأرقام في الرمز مهم، إذن هذه الحالة تمثّل تباديل لعشرة أرقام مأخوذة ثلاثة في كل مرة.

$$ن\,ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$ قانون التباديل

$$= \frac{١٠!}{(١٠ - ٣)!}$$ ن= ١٠، ر= ٣

$$= \frac{١٠!}{٧!}$$ بسط

$$= \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}$$ اقسم على العوامل المشتركة

$$= ٧٢٠$$ بسط

هناك ٧٢٠ رمزًا مختلفًا.

ب) ما احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية؟

نستعمل مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد الحالات التي تكون فيها الأرقام الثلاثة فردية. هناك ٥ أرقام فردية هي: ١، ٣، ٥، ٧، ٩، إذن عدد عناصر الحادثة يساوي ^{٥}ل ٣ = ٦٠.

$$ح(\text{الأرقام جميعها فردية}) = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{٦٠}{٧٢٠}$$

$$= \frac{١}{١٢}$$ بالتبسيط

احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية هو $\frac{١}{١٢}$ = ٨٪ تقريبًا

تحقق من فهمك

٥) شركات: يريد أعضاء مجلس إدارة شركة أن يختاروا رئيسًا ونائبًا للرئيس وأمينًا للسر وأمينًا للصندوق. وكان فهد وسطام من بين تسعة مرشحين لهذه المراكز.

أ) بكم طريقة يمكن لأعضاء مجلس الإدارة اختيار الأعضاء الذين يشغلون هذه المراكز؟

ب) إذا تم الاختيار عشوائيًّا، فما احتمال أن يُختار فهد أو سطام لمركز الرئيس أو نائب الرئيس؟

تأكد

مثال ١

١) جوائز: يريد أحد المراكز التجارية أن يعرض صور جوائزه الستِّ التي يوزِّعها على الزبائن على لوحة. بكم طريقة يمكن تنظيم الجوائز في صفٍّ واحدٍ؟

الأمثلة ٢ - ٤

أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

٢) ^{٧}ل ٢ **٣)** ^{٩}ل ٣ **٤)** ^{٦}ق ٤ **٥)** ^{٥}ق ٢

٦) إعادة تدوير: وضع خالد حاوياتٍ لتجميع المواد التي سيُعاد تدويرها، على أن تكون هناك حاوية لكلٍّ من المواد الآتية: الزجاج والبلاستيك والورق والألومنيوم. بكم طريقة يمكن أن ينظم خالد هذه الحاويات في صفٍّ؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مثال ٥

٧) **مثلجات:** يعرض أحد مصانع المثلجات ٥ أنواع مختلفة بطعم الشوكولاتة، و ٤ أنواع مختلفة بطعم الفراولة و ٦أنواع بطعم التوت.

أ) بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الزبائن ٣ أنواع مختلفة من المثلجات؟

ب) هل تتضمن عملية الاختيار التباديل أم التوافيق؟

جـ) إذا تم اختيار أنواع «المثلجات» عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون الأنواع الثلاثة التي اختارها أحد الزبائن بطعم الشوكولاتة؟

تدرب وحل المسائل

مثال ١

٨) **تصوير:** اصطفَّ الطلاب الأربعة الأوائل في فصول الصف الثالث المتوسط في إحدى المدارس في صفٍّ لالتقاط صورة؛ لعرضها على لوحة الشرف في المدرسة. فبكم طريقة يمكن أن ينظِّم المصور الطلاب الأربعة ليلتقط الصورة؟

٩) **مسابقات علمية:** وصل ٨ طلاب إلى المرحلة النهائية في مسابقات علمية. فبكم طريقة يمكن أن يقف هؤلاء الطلاب في صفٍّ على منصةَّ قاعة الاحتفالات؟

الأمثلة ٢ - ٤ أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي:

١٠) $ل_{٦}^{٦}$ ١١) $ل_{١}^{٥}$ ١٢) $ل_{١}^{٤}$ ١٣) $ل_{٣}^{٧}$

١٤) $ق_{٦}^{٧}$ ١٥) $ق_{٣}^{٥}$ ١٦) $ق_{٥}^{٥}$ ١٧) $ق_{٠}^{٣}$

١٨) **مجوهرات:** يعمل قاسم في محل لبيع المجوهرات. وقد طلب منه مديره أن يضع ثلاثًا من القلائد الاثنتي عشرة في خزانة العرض الأمامية. فبكم طريقة يمكن أن يرتب قاسم القلائد في خزانة العرض؟

مثال ٥

١٩) **كرات زجاجية:** يوجد في كيس ٢٠ كرة زجاجية، منها ٧ كرات حمراء و ٨ زرقاء و ٥خضراء. فإذا سُحبت ١٥ كرة من الكيس عشوائيًّا ، فما احتمال سحب ٥ كرات من كل لون؟

٢٠) **كرة قدم:** رشَّح معلم التربية الرياضية ٩ طلاب من الصف الأول المتوسط، و٦ طلاب من الصف الثاني المتوسط، و٨ طلاب من الصف الثالث المتوسط؛ لتشكيل فريق كرة القدم المدرسي. إذا علمت أن الفريق يتكون من ١١ لاعبًا أساسيًّا.

أ) ما عدد طرق اختيار الفريق الأساسي؟

ب) إذا تم اختيار الفريق الأساسي عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون من بينهم طالب واحد على الأقل من الصف الثالث المتوسط؟

حدّد هل يتضمن كل موقف من المواقف الآتية تباديل أم توافيق:

٢١) اختيار ٣ أنواع مختلفة من الفطائر من قائمة تحتوي على ١٢ نوعًا.

٢٢) اختيار الفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى في مسابقة ثقافية.

٢٣) اختيار ٥ كتب لقراءتها من بين ٨ كتب على رفٍّ.

٢٤) ترتيب حروف كلمة «سعودي».

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٢٥) **وظائف:** أجرى ٥١ شخصًا مقابلة لشغل إحدى الوظائف، فقامت لجنة المقابلة باختيار مرشح لهذه الوظيفة و٤ بُدلاء.

أ) هل تتضمن عملية الاختيار تباديل أم توافيق؟

ب) بكم طريقة يمكن أن تختار اللجنة المرشَّح للوظيفة والبُدلاء الأربعة؟

٢٦) **خزانة:** نسي هاني ترتيب الأعداد التي يستعملها لفتح خزانته. ولكنه يتذكر أنها تتكون من الأعداد ٥، ١٦، ٣١. فما العدد الأكبر للمحاولات التي ينفِّذها لفتح الخزانة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٧) **اكتشف الخطأ:** تريد كلٌّ من سلمى ونوف أن يكوِّنا لجنة مؤلفة من ٤ طالبات؛ للإشراف على تزيين المدرسة استعدادًا لاحتفال تكريم الأوائل. تريد كلٌّ منهما أن تحدد عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا تطوَّعت ١٠ طالبات للقيام بهذا العمل. فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

سلمى

$$ل_{٤}^{١٠} = \frac{!١٠}{!(٤-١٠)}$$

$$= ٥٠٤٠$$

نوف

$$ق_{٤}^{١٠} = \frac{!١٠}{!٤!(٤-١٠)}$$

$$= ٢١٠$$

٢٨) حدّد الموقف المختلف عن المواقف الثلاثة الأخرى فيما يأتي، ووضِّح إجابتك:

اختيار ٥ متسابقين في مسابقة ثقافية.	اختيار ١٠ كرات ملونة من حقيبة.
اختيار ٤ خيول من بين ٦ خيول للمشاركة في سباق.	تحديد ترتيب الطلاب الفائزين في إحدى المسابقات.

٢٩) **تبرير:** حدّد هل تكون العبارة $ل_{ر}^{ن} = ق_{ر}^{ن}$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا. فسِّر إجابتك.

٣٠) **اكتب:** اذكر موقفًا لاختيار ٣ أشياء من بين ٨ أشياء، على ألا يكون الترتيب فيه مهمًّا.

تدريب على اختبار

٣١) يريد سعيد أن يزرع ٣ أنواع مختلفة من بين ٨ أنواع مختلفة من الأزهار على جانب ممرٍّ في حديقته. بكم طريقة يمكنه زراعة هذه الأزهار؟

أ) ٣٤٢ **جـ)** ٣٣٦

ب) ٣٣٨ **د)** ٣٢٨

٣٢) مع سالم ٦٠ ورقة نقدية من فئتي عشرة ريالات وخمسة ريالات، قيمتها ٤٨٠ ريالا. فكم ورقة معه من فئة عشرة ريالات؟

أ) ٢٤ **جـ)** ٣٦

ب) ٣٠ **د)** ٤٠

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مراجعة تراكمية

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لكل مجموعة من مجموعات البيانات الآتية مقرِّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرةٍ. الدرس (١٠-٣)

٣٣) ٧٦، ٤٧، ٥٩، ٤٧، ٧٢، ٨٩

٣٤) ٢٠، ٣٠، ١٠، ٤٠، ٢٠، ١٢، ٥٠

٣٥) مسح: أجرت إحدى شركات صنع العصائر دراسة مسحيةً؛ لمعرفة عدد العلب التي يشتريها الزبون في الأسبوع. فحصلت على الاستجابات الآتية: ١٤، ٧، ٣، ٠، ١٠، ١٢، ١٠، فأي مقاييس النزعة المركزية أفضل لتمثيل هذه البيانات؟ برّر إجابتك، ثم أوجد هذا المقياس. الدرس (١٠-٢)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا اخترت عشوائيًّا قطعة بلاستيك واحدةً من كيس يحوي ١٠ قطع حمراء وَ ١٢ قطعة زرقاء وَ ٨ قطع خضراء وَ ٤ قطع صفراء وَ ١٢ قطعة سوداء، فأوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية:

٣٦) ح (زرقاء)

٣٧) ح (حمراء)

٣٨) ح (سوداء أو صفراء)

٣٩) ح (خضراء أو حمراء)

٤٠) ح (ليست زرقاء)

٤١) ح (ليست خضراء)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

٥-١٠

فيما سبق

درست حساب احتمالٍ بسيطٍ.

والآن

- أجد احتمال حادثتين مستقلتين أو حادثتين غير مستقلتين.
- أجد احتمال حادثتين متنافيتين أو حادثتين غير متنافيتين.

المفردات

الحادثة المركبة

الحادثتان المستقلتان

الحادثتان غير المستقلتين

الحادثتان المتنافيتان

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

احتمالات الحوادث المركبة

لماذا ؟

يرغب خالد في السفر من الرياض إلى جدة بالطائرة.
وتشير تقارير شركة الطيران إلى وصول الطائرات في موعدها بنسبة ٩٢٪ من الرحلات. كما تشير إلى فقدان الأمتعة في ١٪ من الحالات. ما احتمال وصول طائرة خالد في موعدها وعدم فقدان أمتعته؟

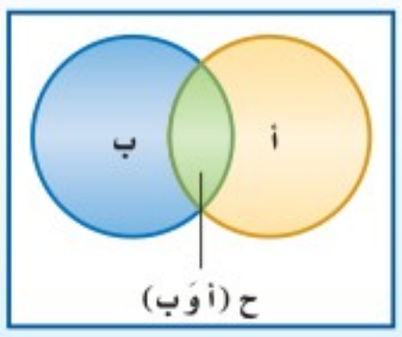
الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة : تذكّر أن الحادثة الواحدة، مثل الطيران إلى جدة تُسمى حادثة بسيطة. وأن **الحادثة المركبة** تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر. فاحتمال وصول الطائرة في موعدها وعدم فقدان الأمتعة مثال على الحادثة المركبة. وقد لا يؤثر وصول الطائرة في موعدها على فقدان الأمتعة أو عدمه، وتُسمّى هاتان الحادثتان **حادثتين مستقلتين**؛ لأن نتيجة إحداهما لا تؤثر في نتيجة الأخرى.

مفهوم أساسي — احتمال الحوادث المستقلة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معًا، يساوي حاصل ضرب احتمال الحادثة أ في احتمال الحادثة ب.

النموذج:



الرموز: ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب)

مثال ١ من واقع الحياة — احتمال الحوادث المستقلة

كرات زجاجية : يحتوي كيس على ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سُحبت منه كرة عشوائيًّا ثم أُعيدت وسُحِبت كرة ثانية، فأوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء.

الكرة الأولى: ح(سوداء) $= \frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{٦}{٢١}$

الكرة الثانية: ح(صفراء) $= \frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{٤}{٢١}$

ح (سوداء وصفراء) = ح (سوداء) × ح (صفراء) احتمال الحوادث المستقلة

$= \frac{٦}{٢١} \times \frac{٤}{٢١} = \frac{٢٤}{٤٤١}$ عوّض

الاحتمال يساوي $\frac{٢٤}{٤٤١} = ٤,٥٪ \approx$.

تحقق من فهمك

١أ) ح (زرقاء وخضراء)

١ب) ح (ليست سوداء و زرقاء)

عندما تؤثر نتيجة حادثة ما في نتيجة حادثة أخرى نقول عنهما: إنهما **حادثتان غير مستقلتين**، ففي المثال ١ إذا لم تُرجع الكرة التي سُحبت في المرة الأولى إلى الكيس، فإن سحب الكرتين يمثل حادثتين غير مستقلتين؛ لأن احتمال سحب الكرة الثانية يعتمد على لون الكرة التي سُحبت أولًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

مفهوم أساسي — احتمال الحوادث غير المستقلة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب غير مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة (أ) في احتمال وقوع الحادثة (ب) بعد وقوع الحادثة أ.

الرموز: ح (أ وَ ب) = ح (أ) × ح (ب بعد أ)

تذكّر أن متمّمة مجموعة هي جميع العناصر التي لا تنتمي إلى تلك المجموعة. افترض أنه يوجد في وعاء ٦ أقلام زرقاء و ٨ أقلام حمراء و ٧ أقلام خضراء و٩ أقلام سوداء، فإن متممة سحب قلم أزرق هي سحب قلم أحمر أو أخضر أو أسود؛ لذا فإن احتمال سحب قلم أزرق يساوي $\frac{٦}{٣٠}$، واحتمال عدم سحب قلم أزرق يساوي $\frac{٣٠-٦}{٣٠} = \frac{٢٤}{٣٠}$، وبالتالي يكون مجموع احتمالي أي حادثتين متتامتين يساوي ١.

مثال ٢ من واقع الحياة — الحوادث غير المستقلة

بطاقات: يوجد في صندوق ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ صفراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء. وبطاقات كل مجموعة مرقّمة بالأرقام من ١ إلى ١٠. فإذا سحب عبد الكريم ثلاث بطاقات عشوائيًّا من الصندوق واحدة تلو الأخرى من دون إرجاع. فأوجد احتمال أن تكون البطاقات المسحوبة بالترتيب المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

أ) ح (حمراء، بيضاء، حمراء)

البطاقة الأولى: ح (حمراء) $= \frac{\text{عدد البطاقات الحمراء}}{\text{عدد البطاقات الكلي}} = \frac{١٠}{٤٠} = \frac{١}{٤}$

البطاقة الثانية: ح (بيضاء) $= \frac{\text{عدد البطاقات البيضاء}}{\text{عدد البطاقات المتبقية}} = \frac{١٠}{٣٩}$

البطاقة الثالثة: ح (حمراء) $= \frac{\text{عدد البطاقات الحمراء المتبقية}}{\text{عدد البطاقات المتبقية}} = \frac{٩}{٣٨}$

ح (حمراء، بيضاء، حمراء) = ح (حمراء) × ح (بيضاء) × ح (حمراء)

$= \frac{١}{٤} \times \frac{١٠}{٣٩} \times \frac{٩}{٣٨} = \frac{١٥}{٩٨٨}$ عوّض

إذن الاحتمال يساوي $\frac{١٥}{٩٨٨} = ١,٥٪$ تقريبًا.

ب) ح (أربعة ، أربعة ، ليس تسعة)

بعد أن يسحب عبد الكريم البطاقتين اللتين تحملان الرقم ٤، إذن يبقى في الصندوق ٣٨ بطاقة. وبما أن البطاقتين المسحوبتين لا تحملان الرقم ٩، فإنه يوجد في الصندوق ٤ بطاقات تحمل الرقم ٩؛ وعليه فإن عدد البطاقات التي لا تحمل الرقم ٩ يساوي ٣٨ − ٤ = ٣٤.

ح (أربعة، أربعة، ليس تسعة) = ح (أربعة) × ح (أربعة) × ح (ليس تسعة)

$= \frac{٤}{٤٠} \times \frac{٣}{٣٩} \times \frac{٣٤}{٣٨}$

$= \frac{١٧}{٢٤٧٠}$

إذن الاحتمال يساوي $\frac{١٧}{٢٤٧٠} = ٠,٧٪$ تقريبًا.

إرشادات حل المسألة

التمثيل

يساعد تمثيل الموقف أو المسألة في فهم السؤال المطروح، لذا استعمل أوراقًا ملونة لتمثيل المسألة.

تحقق من فهمك

٢أ) ح (اثنان، خمسة، ليس خمسة)

٢ب) ح (حمراء، ليست حمراء، حمراء)

الحوادث المتنافية: تُسمّى الحادثتان اللتان لا يمكن وقوعهما معًا **حادثتين متنافيتين**. افترض أنك تريد أن تجد احتمال سحب بطاقة حمراء أو بطاقة زرقاء من وعاء يحتوي على بطاقات ملوّنة. بما أنه لا يمكن أن تكون البطاقة حمراء وزرقاء في الوقت نفسه فتُسمى هاتان الحادثتان حادثتين متنافيتين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

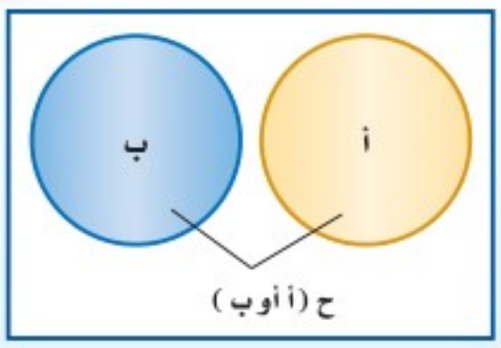
مفهوم أساسي

الحوادث المتنافية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتمالي الحادثتين.

الرموز: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)



إرشادات للدراسة

«و» ،«أو»

ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «و» بالحوادث المستقلة وغير المستقلة، في حين ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «أو» بالحوادث المتنافية وغير المتنافية.

مثال ٣ من واقع الحياة — الحوادث المتنافية

أوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية عند رمي مكعب أرقام:

أ) ح (٣ أو ٥)

بما أنه لا يمكن أن يظهر الرقم ٣ والرقم ٥ في الوقت نفسه على وجه المكعب العلوي، فإن هاتين الحادثتين متنافيتان.

ح (ظهور ٣) = $\frac{\text{عدد الأوجه التي تحمل ٣}}{\text{عدد أوجه المكعب جميعها}} = \frac{١}{٦}$

ح (ظهور ٥) = $\frac{\text{عدد الأوجه التي تحمل ٥}}{\text{عدد أوجه المكعب جميعها}} = \frac{١}{٦}$

ح (٣ أو ٥) = ح (ظهور ٣) + ح (ظهور ٥) — احتمال الحوادث المتنافية

$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$ — عوّض

$= \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ — اجمع

إذن احتمال ظهور الرقم ٣ أو ٥ عند رمي مكعب أرقام يساوي $\frac{١}{٣}$ = ٣٣٪ تقريبًا.

ب) ح (٤ على الأقل)

ظهور ٤ على الأقل يعني ظهور ٤ أو ٥ أو ٦؛ لذا يجب أن تجد احتمال ظهور ٤ أو ٥ أو ٦.

ح (٤ على الأقل) = ح (ظهور ٤) + ح (ظهور ٥) + ح (ظهور ٦) — حوادث متنافية

$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$ — عوّض

$= \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ — اجمع ثم بسّط

إذن احتمال ظهور ٤ على الأقل يساوي $\frac{١}{٢}$ = ٥٠٪ .

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

يمكن أن تجد الاحتمال في المثال ٣ أ، بقسمة عدد عناصر الحادثة على عدد النواتج الممكنة جميعها.

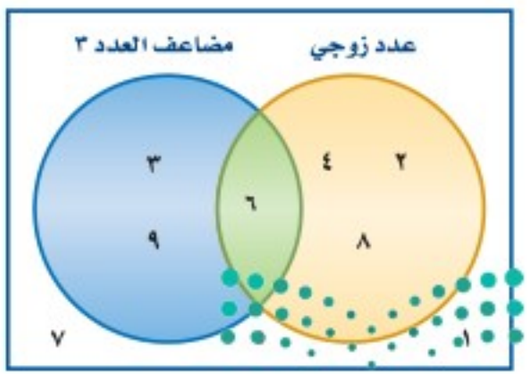
$\frac{١}{٣} = \frac{٢}{٦} = \frac{١+١}{٦}$

تحقق من فهمك

٣أ) ح (أقل من ٣)

٣ب) ح (عدد زوجي)

افترض أنك تريد أن تجد احتمال سحب بطاقة تحمل عددًا زوجيًّا أو مضاعفًا للعدد ٣ عشوائيًّا من مجموعة مكوّنة من ٩ بطاقات مرقّمة بالأرقام من ١ إلى ٩. وبما أن العدد الظاهر على البطاقة يمكن أن يكون زوجيًّا ومضاعفًا للعدد ٣ في الوقت ذاته، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.



ح (عدد زوجي) $\frac{٤}{٩}$ ح (مضاعف للعدد ٣) $\frac{٣}{٩}$ ح (زوجي ومضاعف للعدد ٣) $\frac{١}{٩}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

في الكسرين الأول والثاني السابقين حُسب احتمال سحب العدد ٦ مرتين؛ إحداهما في حادثة ظهور عدد زوجي، والثانية في حادثة ظهور مضاعف للعدد ٣؛ لذا يتطلب إيجاد الاحتمال المطلوب أن نطرح ح (عدد زوجي ومضاعف للعدد ٣) من مجموع الاحتمالين الأولين.

إذن ح (عدد زوجي أو مضاعف للعدد ٣) = ح (عدد زوجي) + ح (مضاعف للعدد ٣) – ح (عدد زوجي ومضاعف للعدد ٣) $= \frac{٤}{٩} + \frac{٣}{٩} - \frac{١}{٩} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$.

قراءة الرياضيات

أ أو ب

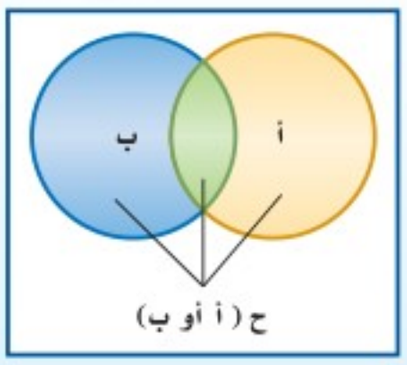
يختلف استعمال أ أو ب عن الاستعمال اللغوي، فالعبارة أ أو ب تسمح بإمكانية وقوع الحادثتين أ و ب معًا أيضًا.

مفهوم أساسي الحوادث غير المتنافية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ وَ ب غير متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتماليهما ناقص احتمال وقوع الحادثتين معًا.

الرموز: ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح(ب) – ح (أ وَ ب)



تنبيه !

تقاطع الحوادث

عند إيجاد احتمالات الحوادث غير المتنافية، نحسب تقاطع الحادثتين مرتين؛ لأنه يوجد في كلتا الحادثتين. لذا يجب الانتباه إلى أنه في الحقيقة يقع في تقاطعهما مرة واحدة.

مثال ٤ من واقع الحياة الحوادث غير المتنافية

الطلاب الرياضيون: **يوجد من بين ٢٤٠ طالبًا في مدرسة ما ١٧٦ طالبًا متفوقًا علميًّا و ٤٨ طالبًا متفوقًا رياضيًّا. وهناك ٣٦ طالبًا متفوقًا علميًّا ورياضيًّا. اختير طالب عشوائيًّا فما احتمال أن يكون متفوقًا علميًّا أو رياضيًّا ؟**

بما أن بعض الطلاب متفوقون علميًّا ورياضيًّا فالحادثتان غير متنافيتين.

ح (متفوق رياضيًّا)$= \frac{٤٨}{٢٤٠}$، ح (متفوق علميًّا) $= \frac{١٧٦}{٢٤٠}$، ح (متفوق رياضيًّا وعلميًّا)$= \frac{٣٦}{٢٤٠}$

ح (متفوق رياضيًّا أو علميًّا)= ح (متفوق رياضيًّا)+ ح (متفوق علميًّا)– ح (متفوق رياضيًّا وعلميًّا)

$= \frac{٤٨}{٢٤٠} + \frac{١٧٦}{٢٤٠} - \frac{٣٦}{٢٤٠}$ عوّض

$= \frac{١٨٨}{٢٤٠} = \frac{٤٧}{٦٠}$ بسط.

الاحتمال يساوي $\frac{٤٧}{٦٠} = ٧٨٪$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

٤) مكعب أرقام: عند رمي مكعب أرقام، ما احتمال ظهور عدد فردي أو أولي؟

تأكد

المثالان ١، ٢ **بيّن إن كانت الحوادث في الأسئلة الآتية مستقلة أم غير مستقلة، ثم أوجد احتمال كلٍّ منها :**

١) ألعاب الأطفال: يحتوي صندوق ألعاب على ١٢ دمية و ٨ سيارات صغيرة و ٣ كرات. إذا اختارت أمينة اثنتين عشوائيًّا من هذه الألعاب لأخيها الأصغر، فما احتمال أن تكون قد اختارت سيارتين صغيرتين؟

٢) فواكه: تحتوي سلة على ٦ تفاحات و ٥ موزات و ٤ برتقالات و ٥ كمثرى. إذا اختار ملاك حبة واحدة من الفاكهة عشوائيًّا وأكلها ثم اختار حبة ثانية. فما احتمال أن يكون قد اختار موزة ثم تفاحة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

المثالان ٣، ٤

٣) **كتب:** اختار حسن كتابًا من الرف المجاور عشوائيًّا، وأعاده ثم اختار كتابًا آخر. فما احتمال أن يكون قد اختار كتابين من كتب الرياضيات؟

يحتوي صندوق على ٨ كرات حمراء و٨ سوداء و ٨ بيضاء و ٨ زرقاء، وقد رُقّمت كرات كل لون بالأرقام من ١ إلى ٨، فإذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا من الصندوق. حدّد هل الحادثتان في كلٍّ ممّا يأتي متنافيتان أم غير متنافيتين، ثم أوجد الاحتمال:

٤) ح (٢ أو ٨)　　٥) ح (حمراء أو زرقاء)　　٦) ح (زوجي أو سوداء)

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢

حدّد إذا كانت الحوادث فيما يأتي مستقلة أم غير مستقلة، ثم احسب احتمال كلٍّ منها:

٧) **نقود:** إذا أُلقيت قطعة نقود ٤ مراتٍ، فما احتمال ظهور الكتابة في المرات الأربع جميعها؟

٨) **مكعب أرقام:** رمي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور عددين مختلفين؟

٩) **حلوى:** يحتوي صندوق على ١٠ قطع شوكولاتة بالحليب و٨ قطع شوكولاتة سوداء و ٦ قطع شوكولاتة بيضاء. اختار محمد قطعة واحدة عشوائيًّا وأكلها، ثم اختار قطعة ثانية عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون قد اختار قطعة شوكولاتة بالحليب، ثم قطعة شوكولاتة بيضاء؟

١٠) **مكعب أرقام:** إذا أُلقي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور العدد نفسه في الرميتين؟

المثالان ٣، ٤

حدّد إذا كانت الحوادث الآتية متنافية أم غير متنافية، ثم أوجد احتمال كلٍّ منها:

١١) **لعبة البولينج:** تشير نتائج سابقة إلى أن احتمال أن يُسقِط مشعل جميع القوارير في المحاولة الأولى ٣٠٪ ، واحتمال إسقاطها في المحاولة الثانية ٤٥٪ ، واحتمال عدم إسقاطها في المحاولتين ٢٥٪. فما احتمال أن يسقط مشعل القوارير جميعها في المحاولة الأولى أو الثانية لأيِّ إطارٍ؟

١٢) **صغار القططة:** أنجبت هرة ٨ قططة صغيرة: خمس إناث ؛ اثنتان برتقاليتان، و ٣ ملونة ، وثلاثة ذكور؛ واحد برتقالي، واثنان ملونان. فأراد خالد أن يحتفظ بواحدة من القططة الصغيرة، فما احتمال أن يختار منها واحدًا برتقالي اللون أو أنثى عشوائيًّا؟

الربط مع الحياة

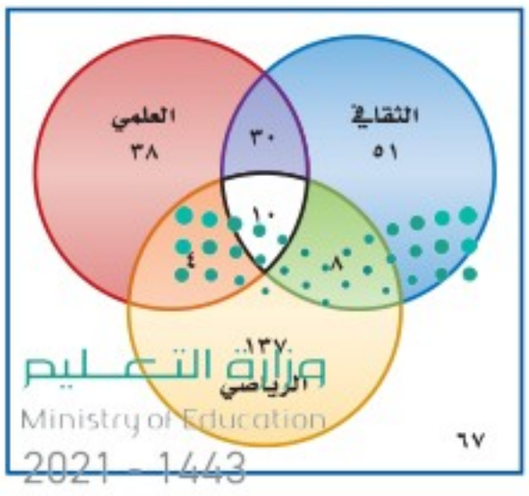
لعبة البولينج رياضة فردية أو جماعية، تُقذف فيها كرة من البلاستيك الثقيل (١٦ رطلًا) لتضرب قوارير خشبية أو بلاستيكية طول الواحدة منها حوالي ٣٨ سم، موضوعة في نهاية مضمار طوله ١٨ مترًا، وعرضه ١,٠٤ مترًا؛ بهدف إسقاط أكبر عدد منها وتسجيل نقاطٍ.

يحتوي كيس على ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء و ١٠ خضراء، ورُقّمت البطاقات من كل لون بالأعداد من ١ إلى ١٠، فإذا سُحبت بطاقتان من دون إرجاع، فأوجد كلًّا من الاحتمالات الآتية:

١٣) ح (حمراء أو زرقاء)　　١٤) ح (زرقاء أو بيضاء)　　١٥) ح (١٠ ثم حمراء)

١٦) ح (٨ ثم زرقاء)　　١٧) ح (خمسة ثم خضراء)　　١٨) ح (٣ أو ليست بيضاء)

١٩) **النشاط المدرسي:** يمثّل شكل ڤن الآتي النشاطات المدرسية التي يشارك فيها طلاب المرحلة المتوسطة في إحدى المدارس.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

أ) ما عدد طلاب المرحلة المتوسطة في هذه المدرسة؟

ب) ما عدد الطلاب المشاركين في النشاط الرياضي؟

جـ) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون مشاركًا في النشاط الرياضي أو العلمي؟

د) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون مشاركًا في النشاطين الثقافي والعلمي فقط؟

٢٠) **حلوى:** يحتوي وعاء على ١٠ قطع حلوى حمراء، و٦ خضراء، و٧ صفراء و ٥ برتقالية. فما احتمال أن يتم اختيار ٣ قطع عشوائيًّا مع الإرجاع، على أن تكون الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة برتقالية ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

٢١) **اكتشف الخطأ:** يريد كلٌّ من حمدٍ وجمالٍ تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء أو حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على ٨ كرات زرقاء و ٦ حمراء و ٨ صفراء و ٤ بيضاء. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ اشرح تبريرك.

حمد

ح (زرقاء أو حمراء)
= ح(زرقاء) + ح (حمراء)
$= \frac{٨}{٢٦} + \frac{٦}{٢٦}$
$= \frac{١٤}{٢٦}$ = ٥٤٪ تقريبًا

جمال

ح (زرقاء أو حمراء)
= ح (زرقاء) × ح (حمراء)
$= \frac{٨}{٢٦} \times \frac{٦}{٢٦}$
$= \frac{٤٨}{٦٧٦}$ = ٧٪ تقريبًا

٢٢) **تبرير:** افترض أن هناك ٣ حوادث غير متنافية هي أ، ب، جـ، واكتب جميع الاحتمالات التي يجب أخذها في الاعتبار عند حساب ح (أ أو ب أو جـ)، ثم اكتب الصيغة التي تستعمل لحساب هذا الاحتمال.

٢٣) **مسألة مفتوحة:** صف موقفًا في حياتك يتضمن حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة، واشرح الأسباب التي تجعل الحادثة مستقلة أو غير مستقلةٍ.

٢٤) **اكتب:** اشرح لماذا يُستعملُ الطرح عند حساب احتمال حادثتين غير متنافيتين.

تدريب على اختبار

٢٥) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكوّنة من ٤ أشخاص من بين ١٢ شخصًا؟

أ) ٤٨ **جـ)** ٤٩٥

ب) ٤٨٣ **د)** ١١٨٨٠

٢٦) **إجابة قصيرة:** إذا كان احتمال ظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقود يساوي احتمال ظهور الكتابة، فما احتمال ظهور الكتابة إذا أُلقيت قطعة النقد مرة أخرى؟

أ) $\frac{١}{٢}$ **جـ)** $\frac{١}{٤}$

ب) $\frac{١}{٣}$ **د)** $\frac{٣}{٤}$

مراجعة تراكمية

٢٧) **هندسة:** مستطيل عرضه ٣ $\sqrt{٥}$ سنتمتر، وطوله ٤ $\sqrt{١٠}$ سنتمتر. أوجد مساحته. ثم اكتب الإجابة على شكل جذر في أبسط صورة. (الدرس ٩- ٢)

حل كلًّا من المعادلات الآتية، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس ٩ - ٤)

٢٨) $\sqrt{-٣أ} = ٦$ ٢٩) $٥\sqrt{٢} = \sqrt{س}$ ٣٠) $٣\sqrt{٤س} - ٢ = ١٠$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

عيّن العينة والمجتمع الذي اختيرت منه فيما يأتي، ثم صنّف الطريقة المُستعملة لجمع البيانات:

١) **لُعب:** دعت شركة تنتج لُعبًا للأطفال ٥٠ طفلًا لاختيار لعبة جديدة ورصدت ردود أفعالهم.

٢) **أزهار:** أرسل مشتل استبانة؛ لتحديد نوع الأزهار التي يفضلها الناس بصورة أكثر. وقد أرسل هذه الاستبانة إلى من تخطّى سن الـ ٥٠ سنة في القوائم البريدية الخاصة بزبائن المشتل.

احسب قيمة كلٍّ من المقادير الآتية:

٣) $ل_{٥}^{٧}$ ٤) $ق_{٤}^{١٠}$

٥) $ق_{٢}^{٧}$ ٦) $ل_{٣}^{٦}$

ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات الآتية؟ برّر إجابتك، واحسب قيمة المقياس:

٧) **انتخابات:** رصد مركز انتخابات، أعمار الأشخاص الذين انتخبوا في ذلك المركز فكانت: ٢١، ٢٥، ٣٢، ٤١، ٣٢، ٢٠، ٦٥، ٣٣، ٣٠، ٧٢

٨) **تسوّق:** رصد محل تجاري عدد القطع التي يشتريها المتسوقون في يومٍ معيّنٍ فكانت: ٣، ٤، ٥، ٣، ٤، ٥، ٥، ٣، ٢، ٣، ٢، ١٠.

بيّن إن كانت العينة في كلٍّ ممّا يأتي متحيزة أم غير متحيزة، وبرِّر إجابتك:

٩) **صحف:** أُرسلت استبانة لجميع المشتركين في إحدى الصحف؛ لمعرفة الصحيفة التي يفضل الناس قراءتها.

١٠) **تسوّق:** سُئل كل شخص يغادر مجمّعًا تجاريًّا عن أفضل ٣ محالّ لبيع الملابس في المجمّع.

١١) **كتب:** بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة من بين عشرة كتب مختلفة؟

١٢) ما الاحتمال النظري لظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقد؟

١٣) **مكعب أرقام:** عند رمي مكعب أرقام مرتين، ما احتمال ظهور العدد ٢ في المرة الأولى، والعدد ٣ في المرة الثانية؟

١٤) **تعليم:** سأل خالد ٢٠٠ طالب في مدرسته عن عدد الأيام التي يحل فيها الطلاب واجباتهم المنزلية في الأسبوع. وعرضت النتائج في الجدول الآتي:

عدد الأيام	عدد الطلاب
١	٦
٢	١٨
٣	٣١
٤	٤٦
٥	٥٧
٦ أو أكثر	٤٢

أ) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون قد حلّ واجبات منزلية في أكثر من خمسة أيام؟

ب) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون قد حل واجبات منزلية في ثلاثة أيام على الأكثر؟

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعات البيانات الآتية:

١٥) ٤، ٥، ٥، ٦، ٦، ٩، ٨، ١٠

١٦) ٢٢، ٢٥، ٢٧، ٣٠

١٧) **صحف:** تابع ناصر زمن مطالعة الصحيفة بالدقائق لسبعة من زملائه في أحد الأيام فكانت: ٥، ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٦٠. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرّبًا إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

١٨) **اختيار من متعدد:** لتمثيل مدرسة متوسطة في تجمّع طلابي اختير طالبان عشوائيًّا من كلِّ صفٍّ من الصفوف: الأول والثاني والثالث المتوسط. فما أفضل وصف لهذه العينة؟

أ) بسيطة.

ب) طبقية.

ج) منتظمة.

د) لا شيء مما ذُكر.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الاختبار التراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة.

١) يبيِّن الجدول الآتي عدد السُّعرات الحرارية في ١٢ صنفًا من الأطعمة الخفيفة المختلفة. فما مقياس النزعة المركزية الأكثر تأثرًا بالقيمة المتطرفة ٣٤٢ سُعرًا؟

عدد السعرات الحرارية في الأطعمة			
١٢٢	٨٧	١٤٩	١٢١
٦٤	١٣٨	٣٤٢	٧٢
١٧٩	١٠٥	٩٩	١١٤

أ) المتوسط الحسابي **جـ)** المنوال

ب) الوسيط **د)** المدى

٢) أيٌّ ممّا يأتي ليس من عوامل $س^{٤} - ٦س^{٢} - ٢٧$؟

أ) $س^{٢} + ٣$ **جـ)** $س + ٣$

ب) $س - ٣$ **د)** $س^{٢} - ٣$

٣) لدى فاروق ٢٠ قصةً، ويريد أن يختار ٣ قصصٍ منها؛ ليأخذَها معه في رحلةٍ لبضعة أيام، فبكم طريقةٍ يمكنه أن يختار القصص إذا كان الترتيب غير مهمٍّ؟

أ) ٦٠ **جـ)** ١١٤٠

ب) ٨٤ **د)** ١٤٨٢

إرشادات للاختبارات

السؤال ٣: بما أن الترتيب غير مهم، فإن المطلوب هو عدد التوافيق للقصص التي يمكن اختيارها.

٤) ما معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (−١، −٣)، (−٢، ٣)؟

أ) $ص = -٦س - ٩$ **جـ)** $ص = ٤س - ٥$

ب) $ص = -\frac{١}{٤}س + ٣$ **د)** $ص = \frac{٢}{٣}س + ١$

٥) ترتفع قمة جبل حتى ٢٠٣٧ مترًا فوق سطح البحر. فإذا تحدد موقع شخص يسير على هذا الجبل. بالدالة م (ن) = −٥ , ٢ن + ٢٠٣٧، حيث ن عدد الدقائق، فأيٌّ ممّا يأتي يُعدُّ أفضل تفسير لميل الدالة؟

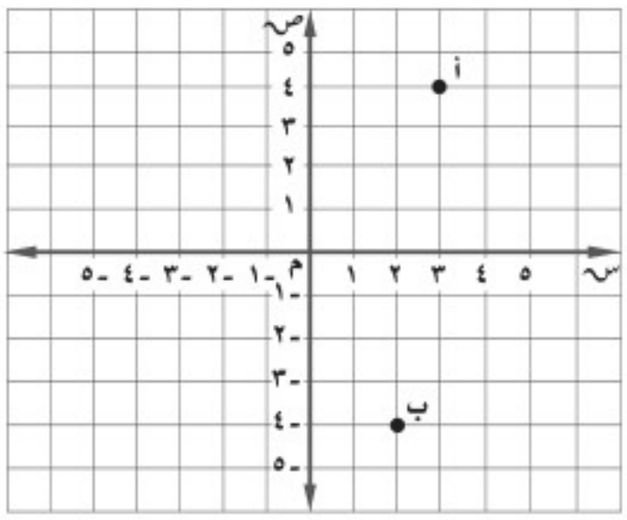
أ) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ مترًا تحت مستوى سطح البحر.

ب) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ مترًا فوق مستوى سطح البحر.

جـ) ينزل هذا الشخص بسرعة ٥ , ٢ متر لكل دقيقة.

د) يصعد هذا الشخص بسرعة ٥ , ٢ متر لكل دقيقة.

٦) أوجد المسافة بين النقطتين أ وَ ب مقرِّبًا الحل إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ؟



أ) ٨,١ **جـ)** ٩,٦

ب) ٨,٥ **د)** ١٠,٢

٧) ثمن تذكرة دخول المتحف للأطفال ٨ ريالاتٍ، وللكبار ١٥ ريالًا. ما تكلفةُ دخول عائلة مكوَّنة من ٤ أطفال ووالديهِمْ؟

أ) ٤٨ ريالًا **جـ)** ٧٦ ريالًا

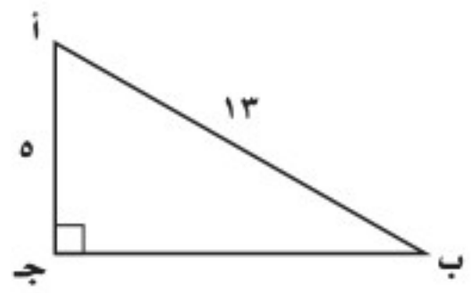
ب) ٦٢ ريالًا **د)** ٩٠ ريالًا

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٨) ما قيمة جا ب في الشكل أدناه؟ اكتب إجابتك في صورة كسر اعتيادي.



٩) أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية، موضّحًا خطوات الحل، ثم قرّب الإجابة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ إذا لزم ذلك.

١٤	١١	٩	٦
١٠	١٦	١٥	١٣
٩	١٢	١٩	١٠

١٠) مع لطيفة علبة فيها ٥ قطع بسكويت بطعم البندق و٧ قطع بطعم الشوكولاتة و٩ قطع بطعم جوز الهند و ٤ قطع بطعم الفراولة. إذا اختارت قطعتين من العلبة عشوائيًّا من دون إرجاع، فما احتمال أن تختار قطعة بطعم البندق، ثم قطعة بطعم الفراولة؟ اكتب الإجابة في صورة كسر اعتيادي.

١١) اكتب عبارة جبرية تمثّل مساحة مثلث ارتفاعه ٤جـ^{٣} د^{٢}، وطول قاعدته ٣جـ د^{٤} بالوحدات المربعة.

١٢) سجّل عدنان ٨٤ هدفًا خلال موسم كرة السلة، وكان مجموع النقاط لهذه الأهداف ١٨٣ نقطة. إذا علمت أنه يمكن أن يكون للهدف نقطتان أو ثلاث نقاط، فما عدد الأهداف التي حصل فيها على ٣ نقاط، والأهداف التي حصل فيها على نقطتين في هذا الموسم؟

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحًا خطوات الحل.

١٣) أراد مجلس بلدية أن يُعِيدَ تنظيم أحد أحياء المدينة. فقرّر أعضاء المجلس أن يستطلعوا آراء سكان الحي. فاختار المجلس ٢٥٠ ربَّ أسْرة من سكان الحي عشوائيًّا، ثم سألهم عبر الهاتف عن رأيهم في مشروع إعادة التنظيم. وبناءً على نتائج الاستطلاع، توصّل المجلس إلى استنتاج أن ٧١٪ من سكان الحي يؤيِّدون إعادة التنظيم.

أ) حدّد العينة.

ب) صِفِ المجتمع الذي اختيرت منه.

جـ) هل طريقة جمع البيانات التي استعملها المجلس دراسة مسحية أم تجريبية أم دراسة قائمة على الملاحظة؟ اشرح إجابتك.

د) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

هـ) إذا كانت العينة غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. وفسّر إجابتك.

للمساعدة ..												
إذا لم تجب عن السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
فراجع الدرس ..	١٠-٢	٧-٢	١٠-٤	٣-٢	٢-٥	٩-٥	٥-٣	٩-٧	١٠-٣	١٠-٥	٦-١	١١-٥	١١-١

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443